Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 31, núm. 1, 2016. Pàg. 5–29. DOI: 10.2436/20.2002.01.64

L'obra matemàtica d'Evarist Giné

Vladimir Koltchinskii, Richard Nickl, Sara van de Geer i Jon A. Wellner

Resum: En aquest article es fa un repàs de les contribucions de l'Evarist Giné a la teoria moderna de la probabilitat i de l'estadística matemàtica en un context infinitodimensional. Les seccions corresponen a les àrees en les quals va tenir una participació més significativa: probabilitat en espais de Banach, processos empírics, el bootstrap, U-estadístics i U-processos, i estadística matemàtica. Es fa èmfasi a l'impuls que la seva obra ha donat a la teoria actual de la probabilitat, l'estadística matemàtica i també a l'aprenentatge automàtic (*machine learning*). A més conté un resum biogràfic i la llista completa de les seves publicacions. Ha esta escrit en ocasió de la seva mort.

Paraules clau: probabilitats en espais de Banach, teorema del límit central, processos empírics, bootstrap, U-estadístics, estimació de densitats.

Classificació MSC2010: 60B12, 60G15, 60E15, 62F40, 62G07.

1 Introducció

Evarist Giné, o bé Evarist Giné-Masdéu (1944–2015), va ser un contribuïdor influent, brillant i prolífic a la teoria moderna de la probabilitat i de l'estadística matemàtica, que es va centrar en els problemes que sorgeixen en un context infinitodimensional. La seva obra ha tingut un impacte important en la teoria moderna de la probabilitat, en l'estadística matemàtica i, recentment, també en l'aprenentatge automàtic. Aquest article és un intent de descriure les aportacions matemàtiques més rellevants d'Evarist Giné i l'hem dividit en diverses seccions cadascuna de les quals es dedica a una àrea de treball significativa: *probabilitat en espais de Banach*, *processos empírics*, *el bootstrap*, *U-estadístics i U-processos*, i *estadística matemàtica*. Al final de l'article es pot trobar un resum biogràfic i una llista de les publicacions d'Evarist Giné, incloent-hi els seus quatre llibres.

Un aspecte que dóna unitat a la major part de l'obra d'Evarist Giné és la combinació magistral de tècniques d'anàlisi real i d'anàlisi funcional amb idees

La traducció d'aquest article de l'original en anglès ha estat feta pels editors del *Butlletí* i revisada per Frederic Utzet.

fonamentals de la teoria de la probabilitat: Evarist Giné tenia un coneixement profund de les tècniques analítiques, les quals aplicava sovint amb una simplicitat molt enginyosa als problemes de probabilitat. Al mateix temps era un probabilista versàtil i de formació clàssica que dominava diverses àrees centrals, des de teoremes límit i desigualtats per a sumes de variables aleatòries independents fins a processos gaussians i l'argumentació amb martingales.

2 Els pilars bàsics de l'obra d'Evarist Giné

2.1 La tesi doctoral

Evarist Giné va escriure la seva tesi doctoral sota la direcció de Richard M. Dudley al Massachusetts Institute of Technology (MIT). De la tesi en van sortir cinc articles notables: dos dels quals [A1, A5] van ser publicats als *Annals of Probability* i eren el resultat de la feina feta com a estudiant de postgrau. L'article [A1] el va conduir cap a l'àrea que descrivim a la secció següent, i l'article [A5] en col·laboració amb R. Klein establia propietats en el límit de la variació quadràtica de processos amb increments gaussians, generalitzant resultats de Dudley [9] per al moviment brownià.

Però el tema principal de la tesi va ser la construcció de tests estadístics computables per a observacions que prenen valors en una varietat de Riemann compacta, que va aparèixer als *Annals of Statistics* l'any 1975 (vegeu [A4]). L'editor que es va encarregar d'aquest article fonamental va ser Lucien Le Cam, el qual va considerar que tenia un nivell matemàtic tan alt que l'únic revisor amb qui va poder pensar va ser Richard Dudley! Aquest article, de fet, va obrir l'àrea d'estudi dels tests de Sobolev, que ha estat important des d'aleshores en el camp de l'estadística direccional, i va requerir el desenvolupament d'alguns resultats matemàtics d'interès independent, com ara una prova del fet que una bola de Sobolev definida sobre qualsevol varietat de Riemann compacta satisfà el teorema del límit central empíric (*i. e.*, és una classe de P-Donsker —vegeu la subsecció 2.3 per a més informació—). En aquesta època la maquinària dels processos empírics generals no estava disponible encara, però Evarist Giné se'n va sortir amb una reducció intel·ligent del problema al teorema del límit central a $C(S)$ (l'espai de les funcions contínues sobre un espai mètric compacte S) fent servir la teoria de la dualitat per als espais de Sobolev. La tesi també requeria la prova d'algunes identitats en anàlisi geomètrica les quals van ser publicades en un article separat [A3] i van portar Evarist Giné a publicar un article genuïnament aplicat [A2], que va aparèixer al *Journal of Geology*. Es pot dir, sens dubte, que aquesta tesi va ser absolutament excepcional pel seu abast i per la seva profunditat.

2.2 Probabilitat en espais de Banach

Partint de l'article [A1] que era part de la seva tesi, Evarist Giné es va endinsar en un dels problemes candents de la teoria de la probabilitat dels anys setanta:

la formulació dels teoremes clàssics del límit per a sumes $\sum_{i=1}^n X_i$ de variables aleatòries centrades, independents i idènticament distribuïdes X_i que prenen valors en un espai de Banach B de dimensió infinita. Per exemple, el *teorema del límit central* (TLC): per a una variable aleatòria gaussiana adequada G que pren valors a B hom vol provar el teorema de límit distribucional

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \to^d G \quad \text{quan} \quad n \to \infty.$$

Mentre que per a espais de dimensió finita una condició necessària i suficient per a la validesa del TLC és que $E\|X_1\|^2$ sigui finita, en espais de dimensió infinita no és així i les propietats geomètriques de l'espai de Banach entren en joc d'una manera essencial. Les tècniques matemàtiques desenvolupades en aquesta àrea durant aquest període van ser fonamentals per a molts camps de les matemàtiques actuals, com ara l'anàlisi funcional geomètrica, la concentració de mesures, l'aprenentatge estadístic (*statistical learning*) o l'estadística matemàtica.

Les contribucions d'Evarist Giné en aquesta àrea van ser substancials; van donar lloc a uns vint articles i van culminar en el seu primer llibre, *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables*, publicat el 1980. El seu treball en aquest camp, que el va dur a terme en col·laboració amb diversos coautors, entre els quals Alejandro de Acosta, Aloisio Araujo i Joel Zinn, inclou la fórmula de Lévy-Khintchine per a lleis infinitament divisibles en espais de Banach i caracteritzacions del domini d'atracció d'una llei normal en espais de Banach [A9, A12], així com teoremes de convergència de moments en el TLC en espais de Banach [A13] i el TLC per a alguns espais de funcions específics [A7, A15, A20, A27, A33].

Una aplicació elegant d'aquests mètodes a la teoria de *conjunts aleatoris* (vegeu [17, 25]) apareix a l'article [A31] escrit en col·laboració amb Marjorie Hahn i Joel Zinn: si B és un espai de Banach separable, podem considerar el conjunt $K(B)$ de tots els subconjunts de B compactes i no buits, el qual és un espai mètric complet respecte de la distància de Hausdorff δ. A més, la suma de Minkowski és una operació ben definida a $K(B)$ i podem fins i tot definir una norma posant $\|A\| = \sup\{\|a\|_B : a \in A\}$. Un *conjunt compacte aleatori* és qualsevol variable aleatòria boreliana X que pren valors a $K(B)$, i la seva esperança EX es pot definir en el sentit de Bochner. Fent servir una reducció molt intel·ligent al TLC per a $C(S)$ amb una elecció adequada de S, a l'article [A31] es prova el teorema del límit central per a conjunts aleatoris: per exemple, si $B = \mathbb{R}^d$, $E\|X\| < \infty$ i si els X_i són conjunts compactes aleatoris independents i idènticament distribuïts, llavors

$$\sqrt{n}\delta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, EX\right)$$

convergeix en distribució cap a una determinada norma d'un procés gaussià. Així mateix es prova un resultat per al cas que B té dimensió infinita.

2.3 Processos empírics

Les tècniques per a l'estudi de la probabilitat en espais de Banach es van desenvolupar principalment per a espais separables, la qual cosa és molt raonable perquè les distribucions de probabilitat en espais mètrics complets per força tenen la seva massa concentrada essencialment en conjunts compactes (*i. e.* són mesures de Radon). Al mateix temps, un problema clau que era obert al final dels anys setanta era el teorema del límit central per a *processos empírics* indexats per classes abstractes $\mathcal{F}$ de funcions $f\colon S \to \mathbb{R}$, on S és un espai mostral arbitrari en el qual variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes $X_1, \dots, X_n$ amb llei P prenen els seus valors.

La *mesura empírica* $P_n := n^{-1}\sum_{j=1}^{n} \delta_{X_j}$ és un estimador natural de la llei desconeguda P i és important saber com de pròximes estan les mitjanes mostrals $P_n f = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)$ de les mitjanes reals $Pf = Ef(X)$, uniformement sobre una classe gran $\mathcal{F}$ de funcions f. Al final dels anys seixanta i principi dels setanta, Vapnik i Chervonenkis, motivats per aplicacions a la teoria estadística del reconeixement de patrons (una part del que avui en dia es coneix per *teoria de l'aprenentatge estadístic*), van obtenir condicions necessàries i suficients, sorprenents per a la llei uniforme dels grans números per a mesures empíriques (el problema de Glivenko-Cantelli)

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |P_n f - Pf| \to 0 \quad \text{quan} \quad n \to \infty \ \text{ q.s.}$$

en el cas que $\mathcal{F} = \{I_C : C \in \mathcal{C}\}$, on $\mathcal{C}$ és una classe de subconjunts mesurables de S. Més tard van estendre aquests resultats a classes de funcions uniformement acotades [36]. Tanmateix, l'extensió del famós «teorema de Donsker», és a dir, el teorema del límit central per a processos empírics clàssics sobre la recta, al mateix context general es mantenia oberta. En notació actual els processos empírics generals s'escriuen

$$f \mapsto \nu_n(f) = n^{1/2}(P_n f - Pf) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(f(X_i) - Ef(X)), \quad f \in \mathcal{F},$$

i la qüestió és saber si ν_n convergeix cap a un procés gaussià $(G_P(f) : f \in \mathcal{F})$ uniformement en $f \in \mathcal{F}$. Tot i que a primera vista sembla que es tracta d'un problema molt abstracte, les tècniques que es necessiten per resoldre'l han tingut un impacte molt fort en la teoria actual de l'estadística i en la teoria de l'aprenentatge. En un article fonamental [10], Dudley va estudiar aquest tipus de teoremes límit, i va mostrar que fins i tot en el cas més senzill en el qual $\mathcal{F}$ està formada per indicadors d'una classe $\mathcal{C}$ de subconjunts de l'espai euclidià, es requereixen tècniques molt diferents de les que s'utilitzen en probabilitats en espais de Banach. Això és degut en part al fet que els processos empírics generalment *no* es concentren en algun espai de Banach de funcions *contínues* (per a alguna mètrica) sobre $\mathcal{F}$ —només cal pensar, per exemple, en la funció de distribució empírica $\mathcal{F} = \{1_{(-\infty,t]} : t \in \mathbb{R}^d\}$— i que, com a conseqüència, l'espai de Banach $\ell^\infty(\mathcal{F})$ de les funcions acotades sobre $\mathcal{F}$ en el qual les ν_n prenen valors no és possible. Dudley [10] va estudiar el teorema del límit central per a processos empírics indexats per una classe de conjunts C i la va anomenar una classe de Donsker per a la llei P de $X_1, \ldots, X_n$ si el TLC era cert per a la classe. Va establir condicions suficients per a la propietat de Donsker en termes de l'entropia mètrica amb *bracketing* de C i va provar que les classes de conjunts de Vapnik-Chervonenkis (una noció que també va introduir Dudley) eren classes de Donsker per a qualsevol llei P que compleixi només unes condicions de mesurabilitat adequades.

Després de la contribució decisiva de Dudley, V. Koltchinskii [18] va donar un conjunt molt útil de condicions suficients per a la validesa del TLC per a processos empírics en termes d'entropies aleatòries de classes de funcions i D. Pollard [31] va fer el mateix en termes de les entropies uniformes. Le Cam [19] va obtenir condicions suficients per al TLC en classes de conjunts en termes d'entropies aleatòries.

Aquestes condicions eren d'un tipus semblant a les que van donar Vapnik i Chervonenkis per a les lleis dels grans números. Les proves d'aquests resultats es basaven en el que avui s'anomenen desigualtats de simetrització per a les probabilitats de les cues. Un argument de condicionament permetia reduir les cotes per a les normes del suprem dels processos empírics a cotes per a un procés subgaussià (condicionadament a $X_1, \ldots, X_n$) del tipus següent: $\mathcal{F} \ni f \mapsto n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j f(X_j)$, on les $\{\varepsilon_j\}$ són variables aleatòries de Rademacher independents i idènticament distribuïdes i independents de les $\{X_j\}$. Aquest procés subgaussià (que actualment s'anomena procés de Rademacher) estava controlat per les entropies de conjunts aleatoris $\{(f(X_1), \ldots, f(X_n)) : f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{R}^n$.

L'entrada d'Evarist Giné a l'escenari dels processos empírics no podia haver estat més impressionant: va ser a través d'un article de setanta pàgines [A34] publicat per invitació dels *Annals of Probability* el 1984 i escrit conjuntament amb Joel Zinn. En aquest article no només van provar resultats molt definitius per al TLC per a processos empírics, sinó que també van introduir tècniques noves i potents en aquesta àrea i van desenvolupar fins a la perfecció les tècniques fetes servir anteriorment. En particular, el mètode de simetrització utilitzat per Koltchinskii [18], Pollard [31] i Le Cam [19] va aconseguir la seva versió definitiva gràcies a les dues magnífiques desigualtats de simetrització de Giné-Zinn que es fan servir des d'aleshores, i la reducció de l'acotació del procés empíric a l'acotació del procés de Rademacher va ser estudiada en tota la seva extensió. A més a més, aquesta tècnica la van combinar amb altres eines de la teoria de probabilitats en espais de Banach, com ara la desigualtat del multiplicador deguda a Pisier, i l'article va establir connexions entre la teoria emergent dels processos empírics i un cos extens de literatura sobre probabilitats en espais de Banach. La idea de la simetrització gaussiana o bé de Rademacher via la desigualtat del multiplicador de Pisier va tenir un paper important en el treball posterior de Giné, també en col·laboració amb Zinn, sobre el *bootstrap* per a processos empírics (vegeu la subsecció 2.4).

Resultats específics notables de l'article de Giné i Zinn del 1984 contenen les versions finals sobre les condicions d'entropia aleatòria per al teorema del límit central per a processos empírics, la demostració de la necessitat d'aquestes condicions per a classes de conjunts (la necessitat de les condicions en termes dels números *shattering* de Vapnik-Chervonenkis va ser provada més tard per Talagrand) i l'extensió de la condició necessària i suficient de Vapnik-Chervonenkis per a la llei dels grans números (teorema de Glivenko-Cantelli) en el cas de classes de funcions no acotades.

Un altre resultat profund i bonic que Evarist Giné va obtenir en el camp dels processos empírics és la caracterització gaussiana de les classes de Donsker uniformes. Una altra vegada, en un article publicat amb Joel Zinn als *Annals of Probability* [A56], va posar la qüestió: quan és que el TLC per a un procés empíric val uniformement respecte de la distribució P de les X_i?, més precisament, si β és una mètrica per a la convergència feble a $\ell^\infty(\mathcal{F})$ i G el procés gaussià límit, quan és cert que

$$\sup_P \beta(\nu_n^P, G_P) \to 0 \quad \text{quan} \quad n \to \infty,$$

on el suprem es pren sobre totes les mesures de probabilitat a P? Un resultat d'aquest tipus té una importància clau per a la interpretació estadística del TLC, atès que en les aplicacions típiques es fa servir per a deduir propietats desconegudes de P i, per tant, no hauria de ser necessari cap coneixement *a priori* de P per a la seva validesa. Essencialment és una pregunta sobre l'estructura de la classe $\mathcal{F}$, i es diu que $\mathcal{F}$ és una classe de Donsker uniforme si el límit anterior es compleix. El resultat sorprenent de [A56] és que una condició necessària i suficient per a la propietat de Donsker uniforme és que el límit G_P sigui *pregaussià* uniforme en P (i això significa que la continuïtat mostral del procés gaussià G_P respecte del seu argument $f \in \mathcal{F}$ per a la mètrica de la covariància intrínseca sigui uniforme en P). En conseqüència, el fet que una classe $\mathcal{F}$ sigui una classe de Donsker uniforme és un problema que es pot decidir completament en termes de propietats de processos gaussians, en contrast notable amb el buit que d'altra banda hi ha entre la propietat de Donsker i les propietats de processos pregaussians. Si tal com sembla un dels objectius principals de la feina d'Evarist Giné en la teoria dels processos empírics era establir connexions importants entre els processos empírics i els (sub)gaussians, el resultat que hem comentat es pot considerar com un punt culminant del seu programa.

2.4 El *bootstrap*

Una idea fonamental en estadística, deguda a Efron [12], és el mètode de repetició del mostreig conegut per *bootstrap*. Es pot fer servir per a inferències i conjunts de confiança en situacions en les quals les distribucions límit existeixen però no són accessibles (perquè són complicades o bé depenen de paràmetres desconeguts). Això es pot il·lustrar en el cas que $X_1, \ldots, X_n$ són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes de llei P amb mitjana μ. Llavors podem fer una extracció a l'atzar dels valors mostrals per tal de crear una mostra *bootstrap*: siguin X_{ni}^b, $i = 1, \dots, n$, extraccions independents i idènticament distribuïdes de la variable aleatòria X_n^b amb llei $\mathbb{P}_n(X_n^b = X_i) = 1/n$ per a $i = 1, \dots, n$. Si $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n$ és la mitjana mostral i $\bar{X}_n^b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_{ni}^b$ és la mitjana dels valors remostrejats, llavors la idea és que la distribució de $\bar{X}_n^b - \bar{X}_n$ (coneguda, donades les X_i) és independent de la distribució de $\bar{X}_n - \mu$ (desconeguda). Per tant, a l'hora de calcular quantils per a l'última distribució, podem recórrer a calcular (aproximadament) quantils per a la primera.

El fet que el que acabem de dir sigui correcte en moltes situacions està lligat bàsicament al teorema del límit central, i Evarist Giné (juntament amb Joel Zinn) va fer diverses contribucions substancials en aquest camp, entre les quals [A47], on es prova la necessitat de les condicions suficients trobades per Bickel i Freedman [3] i es dóna un TLC bootstrap general per a processos empírics, que de fet resol completament la qüestió de la «consistència» del bootstrap (no paramètric). El resultat principal publicat l'any 1990 als *Annals of Probability* [A52] diu que, per al procés empíric bootstrap ν_n^b,

$$\nu_n^b \to^d G_P \text{ (en probabilitat) si i només si } \nu_n \to^d G_P.$$

L'article de l'any 1990 és un cúmul de tècniques sobre la teoria de processos empírics i sobre la teoria de la probabilitat en espais de Banach en diversos aspectes, com ara: (a) proporcionar un altre ús de la desigualtat del multiplicador de Pisier, que tenia un paper important amb els multiplicadors gaussians en el seu article de l'any 1984, ara amb multiplicadors (simetritzats) de Poisson després d'aplicar poissonització i simetrització als pesos multinomials del bootstrap d'Efron; (b) connectar els resultats sorprenents de Ledoux i Talagrand [20, 21] sobre multiplicadors i multiplicadors condicionats del TLC en espais de Banach amb un conjunt important de qüestions estadístiques.

Evarist Giné, en col·laboració amb diversos coautors (especialment el seu alumne Miguel Arcones), també va considerar altres problemes en relació amb els mètodes de remostreig amb bootstrap. Arcones i Giné [A46] proven que el bootstrap de la mitjana mostral de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb variància finita «funciona» si tant la mida de la mostra bootstrap m_n com la mida de la mostra original tendeixen a infinit. A [A53] estudien diversos tests de bootstrap de simetria, i a [A57] mostren com es pot fer bootstrap de U- i V-estadístics. La qüestió important de fer bootstrap de M-estimadors i altres funcionals estadístics regulars va ser considerada a [A58]. Tot aquest conjunt de línies de recerca i de problemes va culminar a les notes del curs que Evarist Giné va impartir a St. Flour sobre teoria asimptòtica per al remostreig amb bootstrap. Aquestes notes continuen essent una referència important i una pedra angular per a la recerca actual [L2].

2.5 U-estadístics i U-processos

La noció de U-estadístic és una extensió natural d'un dels objectes més clàssics de la probabilitat, la suma de variables aleatòries independents. Donada una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ en un espai mesurable S i una funció mesurable $h\colon S \times \cdots \times S \mapsto \mathbb{R}$ (un nucli), el *U-estadístic d'ordre k* es defineix com

$$U_n(h) := \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} h(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$$

amb la suma estesa a tots els $1 \le i_1, \ldots, i_k \le n$ tals que $i_l \ne i_{l'}$, $l \ne l'$.

Aquesta noció té el seu origen en el treballs de Halmos [13] sobre estimació no esbiaixada i de von Mises [35] sobre desenvolupaments de funcionals estadístics regulars a finals dels quaranta. Els U-estadístics van ser introduïts formalment i estudiats per Hoeffding l'any 1948. Evarist Giné es va interessar en la teoria asimptòtica dels U-estadístics a l'inici dels anys noranta, quan aquesta teoria ja estava relativament ben desenvolupada, tant en el cas de U-estadístics basats en observacions independents i idènticament distribuïdes com en casos més generals. A més, Nolan i Pollard [29, 30] van iniciar l'estudi dels *U-processos* (processos empírics amb estructura de U-estadístics indexats pel seus nuclis). Tanmateix, a l'inici dels noranta, molts d'aquests resultats no havien assolit el mateix progrés que els teoremes límit clàssics per a sumes de variables aleatòries independents i un nombre important de problemes estimulants i difícils estaven oberts. Molts d'aquests problemes van ser resolts al llarg dels anys noranta per Evarist Giné en una sèrie d'articles escrits amb diversos coautors, entre els quals Joel Zinn, Miguel Arcones, Stanislaw Kwapień i Rafal Latała. Els resultats obtinguts inclouen lleis del tipus de Marcinkiewicz dels grans números per a U-estadístics (Giné-Zinn [A60]) i la necessitat que el segon moment sigui finit i el nucli degenerat per a la validesa del TLC per a U-estadístics (Giné-Zinn [A66]). També van obtenir resultats notables sobre el teorema del límit central per a U-processos indexats per classes de funcions de Vapnik-Chervonenkis (Arcones-Giné [A65]) i aplicacions sorprenents d'aquests resultats a l'estudi asimptòtic dels M-estimadors basat en U-estadístics; en particular una demostració molt bonica de la normalitat asimptòtica de la mediana simplicial (Arcones, Chen i Giné [A64]).

Els treballs anteriors depenen d'eines tècniques noves i potents, com ara la desigualtat de Hoffmann-Jorgenssen per a U-processos (Giné-Zinn [A60]) i desigualtats de desacoblament (*decoupling*) degudes a de la Peña [5] i de la Peña i Montgomery-Smith [6, 7]. El mètode del desacoblament va ser especialment important i va donar nom al llibre *Decoupling*, escrit l'any 1999 per Giné i de la Peña, que continua essent la referència més important sobre la teoria moderna dels U-estadístics [L3]. Tot i així un dels resultats més espectaculars d'aquesta teoria es va obtenir després de la publicació d'aquest llibre. En diversos articles escrits a finals dels noranta, Evarist Giné i els seus col·laboradors van intentar trobar una condició necessària i suficient per a llei dels logaritmes iterats (LLI) per a U-estadístics degenerats, un problema que va resultar extremament difícil. El fet que la finitud del segon moment del nucli era suficient per a la LLI era conegut des de finals dels vuitanta [8]. Giné i Zhang [A71] van mostrar que hi ha nuclis degenerats amb segon moment infinit per als quals val la LLI. Van donar condicions suficients sobre el nucli que no implicaven la finitud del segon moment, però aquestes condicions encara no eren necessàries. Aquest problema desafiador va ser resolt per a U-estadístics de segon ordre en un article notable de Giné, Kwapień, Latała i Zinn [A84] en el qual van provar el resultat següent. Suposem que X, Y, X_1, $X_2, \ldots$ són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb valors en un espai mesurable $(S, \mathcal{A})$ i sigui $h\colon S \times S \mapsto \mathbb{R}$ un nucli mesurable i simètric. Aleshores,

$$\limsup_n \frac{1}{n \log\log n} \left| \sum_{1 \le i \ne j \le n} h(X_i, X_j) \right| < \infty \text{ q.s.}$$

si i només si es compleixen les condicions següents per a alguna constant $C < \infty$:

(a) h és canònic (degenerat) per a la llei de X (és a dir, $Eh(X, y) = 0$ per a gairebé tot y);

(b) per a tota $u \ge 10$,

$$E(h^2(X, Y) \wedge u) \le C \log\log u;$$

(c) per a alguna $C > 0$,

$$\sup E\Big\{h(X, Y)f(X)g(Y) : \max(Ef^2(X), Eg^2(X)) \le 1;\, f, g \in L^\infty\Big\} \le C.$$

La prova d'aquest resultat completament inesperat fou una obra mestra de tècniques basades en diverses eines de la teoria dels U-estadístics (moltes d'elles desenvolupades pels mateixos autors, com ara les cotes exponencials per al caos de Rademacher degudes a Latała) i en arguments de truncament bastant sofisticats. Un resultat relacionat és una versió nova i definitiva d'una desigualtat de concentració tipus Bernstein per a U-estadístics (Giné, Latała i Zinn [A80]), que és una de les desigualtats més importants i útils en aquesta àrea de les probabilitats. Aquesta desigualtat la van provar per a U-estadístics d'ordre 2 i més endavant va ser estesa a ordres superiors per Adamczak [1]. Adamczak i Latała [2] van obtenir condicions necessàries i suficients per a la llei del logaritme iterat acotada per a U-estadístics d'ordre superior.

2.6 La distribució asimptòtica de l'estadístic t

L'estadístic t de Student amb una mostra

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i / n^{1/2}}{\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 / (n-1)\right\}^{1/2}} = \frac{S_n / V_n}{\sqrt{\frac{n - (S_n/V_n)^2}{n-1}}},$$

on $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $V_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$ i $X_1, \ldots, X_n$ són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, juga un paper clau en l'estadística bàsica aplicada. Mentre que la seva distribució exacta és ben coneguda des del punt de vista de la teoria del mostreig gaussià, és important conèixer les propietats de T_n sota hipòtesis no gaussianes (o d'altres tipus no estàndard). Efron [11] va revisar estudis previs sobre T_n sota condicions no estàndards (incloent-hi els de Hotelling [16], Hoeffding [14] i d'altres) i va considerar el comportament límit de T_n i de sumes autonormalitzades d'aquests estadístics. Logan, Mallows, Rice i Shepp [23] van provar que si X està en el domini d'atracció d'una llei alfa-estable, $0 < \alpha \leq 2$, centrada si $\alpha > 1$ i simètrica si $\alpha = 1$, aleshores $S_n/V_n \to_d Z_\alpha$, on Z_α és subgaussià. A més van conjecturar que «S_n/V_n és asimptòticament normal si [i potser només si] X està en el domini d'atracció de la llei normal i X està centrada». La implicació directa d'aquesta conjectura es prova amb relativa facilitat a partir de resultats estàndards; vegeu [24]. El recíproc, és a dir, el «només si», va ser provat l'any 1997 per Evarist Giné en col·laboració amb Friedrich Götze i David Mason [A74]. Aquest article brillant fa palès el domini absolut que Evarist Giné tenia de la desigualtat de Paley-Zygmund, la qual fa servir per veure que si $\{S_n/V_n\}$ està acotada estocàsticament, aleshores també ho està en L_1.

Giné va tornar a aquest tema almenys en dos articles més: a [A77] (amb David Mason) estudia lleis del logaritme iterat per a sumes autonormalitzades; a [A92] (amb Friedrich Götze) va establir la normalitat asimptòtica dels estadístics t multivariats sota condicions no estàndards.

2.7 Estadística no paramètrica

Al segle XXI, Evarist Giné va començar a treballar en problemes d'estadística no paramètrica, una àrea de l'estadística matemàtica amb una gran activitat des de mitjan anys noranta. L'interès de Giné va ser provocat per l'àmplia aplicabilitat de les eines dels processos empírics en aquesta àrea. Un punt de vista fonamental va ser observar que la profunda desigualtat de Talagrand [34] per als processos empírics es podia utilitzar amb efectes notables, particularment per a tractar problemes que tenen a veure amb cotes del risc en la norma del suprem en estimació de densitats; vegeu [A85, A107]. Per exemple, considerem un estimador de nucli de la forma

$$f_n(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad X_i \sim \text{i.i.d.} \quad P,$$

amb K una funció nucli adequada. Si ignorem el «biaix» de l'estimació, el risc uniforme es pot entendre com el procés empíric

$$\|f_n - Ef_n\|_\infty = \frac{1}{h}\sup_{g\in\mathcal{G}} |(P_n - P)g|, \quad \mathcal{G} = \left\{g = K\left(\frac{x - \cdot}{h}\right) : x \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

Una primera idea clau que es troba a [A85] és que sota condicions simples per a K, per exemple que sigui de variació acotada, la classe $\mathcal{G}$ resulta que és una classe de tipus Vapnik-Chervonenkis i, per tant, fent servir un «chaining argument» i si P té densitat acotada, resulta

$$E\sup_{g\in\mathcal{G}}|(P_n-P)g|\lesssim\sqrt{\frac{h\log(1/h)}{n}}$$

per a eleccions adequades de h. A més per la desigualtat de Talagrand la concentració de $\|f_n-Ef_n\|_\infty$ al voltant de la seva esperança és efectivament gaussiana (sempre per a eleccions adequades de h), i aquest fet es pot fer servir amb objectius diversos: inicialment Evarist Giné en va deduir la constant exacta que limita quasi segurament $\sqrt{nh/\log(1/h)}\|f_n-Ef_n\|_\infty$ quan $n\to\infty$ i $h\to 0$, tant per als estimadors de nucli [A85] com per als estimadors per a ondetes [A107], cas en el qual es requereix un escalat lleugerament diferent. En treballs posteriors [A106, A111] es va posar de manifest que aquestes desigualtats exponencials eren molt útils per a construir estimadors adaptatius de densitats que podien tractar també el biaix $\|Ef_n-f\|_\infty$ (aplicant el mètode de Lepskiĭ [22]). Tècniques relacionades van ser també utilitzades a l'article [A97] per tal de donar aproximacions empíriques (fent servir el graf laplacià) de l'operador de Laplace sobre una varietat de Riemann (un resultat que va ser útil en el camp de l'aprenentatge automàtic), i en l'article [A113] aquestes desigualtats de concentració es van fer servir en una nova manera d'obtenir taxes de contracció en l'estimació de la funció bayesiana no paramètrica; aquestes idees han estat utilitzades des d'aleshores en estadística bayesiana no paramètrica en els articles recents de Ray [32] i Nickl i Söhl [28], entre d'altres.

En un altre article de molta influència [A110] Evarist Giné va construir bandes de confiança adaptatives per a densitats desconegudes trobant amb exactitud la distribució límit de Gumbel de $\|f_n-f\|_\infty$, adequadament escalada i centrada, on f_n és un estimador totalment adaptatiu (una altra vegada basant-se en el mètode de Lepskiĭ [22]). Aquest va ser el primer resultat sobre el límit exacte d'una distribució per a qualsevol estimador adaptatiu, i va requerir una utilització subtil de les tècniques d'aproximació i de la teoria de límits per a processos gaussians no estacionaris. A més de resoldre reptes probabilístics va ser necessària també la introducció de noves hipòtesis qualitatives per a f, que ara es coneixen amb el nom d'*autosimilitud*, les quals van ser adequades també per al cas general d'espais de Hölder [A110]. Aquestes condicions d'autosimilitud resulta que són més o menys les condicions correctes per a l'existència de conjunts de confiança adaptatius no paramètrics, i han estat tractades més a fons en articles recents de Hoffmann i Nickl [15], Chernozhukov, Chetverikov i Kato [4] i en l'article panoràmic de Szabó, van der Vaart i van Zanten [33], tots ells en els *Annals of Statistics*.

Un altre resultat que es mereix ser esmentat, i que està relacionat amb algunes tècniques anteriors al famós article [A34] de Giné i Zinn de l'any 1984, és el de l'article [A103], que afirma l'existència de determinades classes pre-gaussianes de funcions $\mathcal{F}$ tals que: a) *no* són de P-Donsker per a alguna P però b) el *procés empíric regularitzat* $\sqrt{n}(P_n*K_h-P)$ corresponent a un estimador de nucli de la densitat *sí* que convergeix en distribució a $\ell_\infty(\mathcal{F})$ cap al pont brownià generalitzat G_P —per tant, $P_n * K_h$ és estrictament millor que P_n en aquest cas. Aquests resultats han estat instruments molt útils en l'estudi recent de la inferència estadística per a la funció de distribució de mesures de Lévy i distribucions infinitament divisibles; vegeu els articles de Nickl i Reiß [26] i de Nickl, Reiß, Söhl i Trabs [27].

La importància de les tècniques probabilístiques en els fonaments de l'estadística no paramètrica van portar Evarist Giné a escriure la seva quarta monografia, amb el títol de *Mathematical Foundations of Infinite-Dimensional Statistical Models* [L4]. Aplega gran part del seu treball en aquesta àrea, i demostra una altra vegada la visió profunda que tenia dels fonaments matemàtics en què es basen la teoria moderna de la probabilitat i l'estadística. En particular, en els capítols d'aquest llibre dedicats als processos gaussians i als processos empírics, Giné ens ha deixat un monument intel·lectual que serà una referència per a les generacions futures.

3 Biografia[1]

Evarist Giné va morir el 13 de març del 2015 a Hartford, Connecticut. Ha estat un contribuïdor molt important i cocreador de diverses branques de la teoria moderna de la probabilitat les quals han tingut una gran influència, especialment en l'estadística i la teoria de l'aprenentatge (*statistical learning*). La seva feina abasta àrees com ara la probabilitat en espais de Banach, la teoria dels processos empírics, la teoria asimptòtica del bootstrap i dels U-estadístics i processos, així com l'estadística no paramètrica. Va publicar al voltant de cent articles en revistes de primer nivell: vint-i-dos articles als *Annals of Probability* com a autor únic, deu a *Probability Theory and Related Fields*, i vuit articles als *Annals of Statistics*. A més va escriure dos llibres amb una repercussió molt gran, un sobre el teorema del límit central en espais de Banach amb Aloisio Araujo, i l'altre amb Víctor de la Peña sobre desacoblament. Amb Richard Nickl va acabar el seu quart llibre, *Mathematical Foundations of Infinite-Dimensional Statistical Models*, poc abans de morir, publicat a Cambridge University Press.

Evarist Giné va ser elegit membre de l'Institute of Mathematical Statistics (IMS) l'any 1984 i de l'International Statistical Institute (ISI) l'any 1991, va ser membre corresponent de l'Institut d'Estudis Catalans a partir del 1996 i va fer una conferència Medaillon[2] al Congrés Mundial de la Societat Bernoulli l'any 2004 a Barcelona. El juny del 2014 va tenir lloc a Cambridge (Regne Unit) un congrés per celebrar les seves aportacions matemàtiques en ocasió del seu setantè aniversari. Una fotografia de l'Evarist presa per Lucien Birgé en aquest congrés, amb plena salut i el seu bon humor habitual, la reproduïm a la pàgina següent. Evarist Giné havia estat sempre extremament modest i una mostra del seu humor la dóna el correu electrònic que va escriure el juliol del 2014 dient que el congrés en honor seu era «totalment immerescut, però tot i així

1 Aquest apartat, escrit pels mateixos autors de l'article, va ser publicat en el *Institute of Mathematical Statistics Bulletin*.

2 Aquesta conferència comporta l'atorgament d'una medalla.

molt estimulant». De fet, el congrés va servir per posar de manifest les diverses àrees entre les matemàtiques i l'estadística en les quals Evarist Giné i els seus treballs havien tingut un impacte més notable. Un gran respecte per a les seves matemàtiques i la seva personalitat va ser compartit pel gran nombre d'amics i de col·legues que eren presents a Cambridge.

Evarist Giné va néixer el 31 de juliol del 1944 a Falset (Catalunya), en una família que s'ocupava de l'agricultura i de l'elaboració de vins. El seu talent matemàtic prodigiós es va manifestar molt aviat i un professor local va convèncer la seva família que l'Evarist havia de fer l'ensenyament secundari i entrar a la universitat. Va acabar els estudis de batxillerat amb èxit i va fer la carrera de matemàtiques a la Universitat de Barcelona, on va aconseguir el grau de llicenciat l'any 1966. Evarist es va casar amb Rosalind Eastaway aquell mateix any.

En part pel règim franquista i en part pel seu temperament aventurer, el matrimoni va deixar Catalunya, i després d'algun temps fent de professor de matemàtiques a Veneçuela, Evarist va ser acceptat al programa de doctorat en matemàtiques del Massachusetts Institute of Technology (MIT). Va acabar la tesi doctoral el 1973, sota la direcció de Richard M. Dudley, amb un treball sobre tests estadístics per a la uniformitat en varietats riemannianes, que va ser publicat als *Annals of Statistics*. Aquest primer treball, àmpliament citat a la literatura sobre estadística els anys següents, ja posa de manifest una de les característiques principals de la seva recerca: el seu gran interès per als problemes motivats per l'estadística matemàtica, en els quals es necessita desenvolupar eines potents i subtils. Les seves habilitats matemàtiques van produir dos articles més durant el seu període com a doctorand, tots dos publicats en els *Annals of Probability*, que van iniciar una de les seves línies principals de recerca, l'estudi de teoremes de límit en espai de Banach de dimensió infinita.

Evarist Giné va passar el curs 1974–1975 a Berkeley com a lector, i allà va conèixer Le Cam i els altres grans personatges de l'època daurada de l'estadística a Berkeley. Després d'alguns anys passant per diverses institucions, va tornar a Veneçuela, on va ser el cap del departament de matemàtiques de l'Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, va ser professor de la Universitat Autònoma de Barcelona i finalment es va establir a la Universitat Texas A&M, on va ser professor a partir de l'any 1983. Una gran part de la seva feina més original i més influent la va fer en aquesta època en col·laboració amb Joel Zinn, un col·lega i amic de la Texas A&M. El seu treball conjunt va donar lloc al desenvolupament de les eines més importants de la teoria dels processos empírics, com ara les desigualtats de simetrització, cotes per a l'entropia i desigualtats per al multiplicador aleatori, que més tard van penetrar en moltes àrees de les matemàtiques, l'estadística i la informàtica (en particular, l'aprenentatge automàtic). Després de dos anys com a professor al CUNY (Nova York), Evarist Giné va obtenir una posició a la Universitat de Connecticut el 1990, on s'hi va estar fins a la seva mort, últimament com a cap del departament de matemàtiques. Evarist Giné va tenir vuit estudiants de doctorat, entre els quals destaca Miguel Arcones, i va tenir un impacte notable sobre tota una generació de probabilistes i teòrics de l'estadística, la que va rebre la seva formació entre els anys 1990 i 2010.

La pèrdua de l'Evarist provoca un buit enorme en la comunitat matemàtica. Per als que el van conèixer personalment i van treballar amb ell, sempre serà recordat com un gran amic amb qui es podia parlar sense fi de matemàtiques al seu despatx o bé en l'hospitalitat de casa seva. La pèrdua és encara més greu per a la seva família: la seva dona Rosalind, que el sobreviu; les seves dues filles, Núria i Roser, i els seus néts, Liam i Mireia. Però el seu gran entusiasme, l'originalitat i la profunditat de les seves idees perviuran per a moltes generacions futures, a través dels seus escrits matemàtics, en les nostres memòries i en la seva família.

4 Publicacions d'Evarist Giné

Llibres

[L1] Araujo, A.; Giné, E. *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables*. Nova York; Chichester; Brisbane: John Wiley & Sons, 1980. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics)

[L2] Giné, E.; Grimmett, G. R.; Saloff-Coste, L. *Lectures on Probability Theory and Statistics*. Lectures from the 26th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, August 19–September 4, 1996. Edició a cura de P. Bernard. Berlín: Springer-Verlag, 1997. (Lecture Notes in Math.; 1665)

[L3] de la Peña, V. H.; Giné, E. *Decoupling. From Dependence to Independence. Randomly Stopped Processes. U-Statistics and Processes. Martingales and Beyond.* Nova York: Springer-Verlag, 1999. (Probability and its Applications (New York))

[L4] Giné, E.; Nickl, R. *Mathematical Foundations of Infinite-Dimensional Statistical Models*. Cambridge, Regne Unit: Cambridge University Press, 2015.

Articles i edicions de llibres

[A1] Giné M., E. «On the central limit theorem for sample continuous processes». *Ann. Probability*, 2 (1974), 629–641.

[A2] Dudley, R.; Perkins, P. C.; Giné M., E. «Statistical tests for preferred orientation». *J. Geology*, 83 (1975), 685–705.

[A3] Giné M., E. «The addition formula for the eigenfunctions of the Laplacian». *Advances in Math.*, 18 (1) (1975), 102–107.

[A4] Giné M., E. «Invariant tests for uniformity on compact Riemannian manifolds based on Sobolev norms». *Ann. Statist.*, 3 (6) (1975), 1243–1266.

[A5] Klein, R.; Giné, E. «On quadratic variation of processes with Gaussian increments». *Ann. Probability*, 3 (4) (1975), 716–721.

[A6] Giné M., E. «Bounds for the speed of convergence in the central limit theorem in $C(S)$». *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 36 (4) (1976), 317–331.

[A7] Giné M., E. «Some remarks on the central limit theorem in $C(S)$». A: *Probability in Banach Spaces* (Proc. First Internat. Conf., Oberwolfach, 1975). Berlín: Springer, 1976, 101–106. (Lecture Notes in Math.; 526)

[A8] García-Palomares, U.; Giné M., E. «On the linear programming approach to the optimality property of Prokhorov's distance». *J. Math. Anal. Appl.*, 60 (3) (1977), 596–600.

[A9] Araujo, A.; Giné M., E. «Type, cotype and Lévy measures in Banach spaces». *Ann. Probab.*, 6 (4) (1978), 637–643.

[A10] de Acosta, A.; Araujo, A.; Giné, E. «On Poisson measures, Gaussian measures and the central limit theorem in Banach spaces». A: *Probability on Banach Spaces.* Nova York: Dekker, 1978, 1–68. (Adv. Probab. Related Topics; 4)

[A11] Giné, E. «A survey on the general central limit problem in Banach spaces». A: *Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach (1977–1978).* Palaiseau: École Polytech., 1978, Exp. núm. 24, 17 p.

[A12] Araujo, A.; Giné, E. «On tails and domains of attraction of stable measures in Banach spaces». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 248 (1) (1979), 105–119.

[A13] de Acosta, A.; Giné, E. «Convergence of moments and related functionals in the general central limit theorem in Banach spaces». *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 48 (2) (1979), 213–231.

[A14] Giné, E. «Domains of attraction in Banach spaces». A: *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*. Berlín: Springer, 1979, 22–40. (Lecture Notes in Math.; 721)

[A15] Giné, E.; Mandrekar, V.; Zinn, J. «On sums of independent random variables with values in L_p $(2 \le p < \infty)$». A: *Probability in Banach Spaces, II* (Proc. Second Internat. Conf., Oberwolfach, 1978). Berlín: Springer, 1979, 111–124. (Lecture Notes in Math.; 709)

[A16] Giné, E. «Corrections to: "Domains of attraction in Banach spaces"». [*Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*. Berlín: Springer, 1979, 22–40. (Lecture Notes in Math.; 721)]. A: *Seminar on Probability, XIV (Paris, 1978/1979) (French)*. Berlín: Springer, 1980, p. 17. (Lecture Notes in Math.; 784)

[A17] Giné, E. «Sums of independent random variables and sums of their squares». Proceedings of the seventh Spanish-Portuguese conference on mathematics, Part III (Sant Feliu de Guíxois, 1980). *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona*, 22 (1980), 127–132.

[A18] Giné, E. «Domains of partial attraction in several dimensions». *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 16 (2) (1980), 87–100.

[A19] Giné, E. «The central limit problem: three less typical aspects». Proceedings of the seventh Spanish-Portuguese conference on mathematics, Part III (Sant Feliu de Guíxois, 1980). *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona*, 22 (1980), 133–138.

[A20] Giné, E.; León, J. R. «On the central limit theorem in Hilbert space». *Stochastica*, 4 (1) (1980), 43–71.

[A21] Giné M., E.; León, J. R. «On the central limit theorem in Hilbert space». A: *Proceedings of the First World Conference on Mathematics at the Service of Man* (Barcelona, 1977). Vol. I. Barcelona: Univ. Politec., 1980, 620–625.

[A22] Araujo, A.; Giné, E.; Mandrekar, V.; Zinn, J. «On the accompanying laws theorem in Banach spaces». *Ann. Probab.*, 9 (2) (1981), 202–210.

[A23] Giné, E. «Correction to: "Domains of partial attraction in several dimensions"». *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 17 (1) (1981), 143–145.

[A24] Giné, E. «Central limit theorems in Banach spaces: a survey». A: *Probability in Banach Spaces, III* (Medford, Mass., 1980). Berlín; Nova York: Springer, 1981, 138–152. (Lecture Notes in Math.; 860)

[A25] Giné, E.; Marcus, M. B. «On the central limit theorem in $C(K)$». A: *Statistical and Physical Aspects of Gaussian Processes* (Saint-Flour, 1980). París: CNRS, 1981, 361–383. (Colloq. Internat. CNRS; 307)

[A26] GINÉ, A.; MARCUS, M. B. «Some results on the domain of attraction of stable measures on $C(K)$». *Probab. Math. Statist.*, 2 (2) (1982), 125–147 (1983).

[A27] GINÉ, E. «The Lévy-Lindeberg central limit theorem in L_p, $0 < p < 1$». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88 (1) (1983), 147–153.

[A28] GINÉ, E. «Large deviations in spaces of stable type». *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 19 (3) (1983), 267–279.

[A29] GINÉ, E. «A counterexample on domains of partial attraction in Banach spaces». A: *Probability in Banach Spaces, IV* (Oberwolfach, 1982). Berlín; Nova York: Springer, 1983, 102–111. (Lecture Notes in Math.; 990)

[A30] GINÉ, E.; HAHN, M. G. «On stability of probability laws with univariate stable marginals». *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 64 (2) (1983), 157–165.

[A31] GINÉ, E.; HAHN, M. G.; ZINN, J. «Limit theorems for random sets: an application of probability in Banach space results». A: *Probability in Banach Spaces, IV* (Oberwolfach, 1982). Berlín: Springer, 1983, 112–135. (Lecture Notes in Math.; 990)

[A32] GINÉ, E.; MARCUS, M. B. «The central limit theorem for stochastic integrals with respect to Lévy processes». *Ann. Probab.*, 11 (1) (1983), 58–77.

[A33] GINÉ, E.; ZINN, J. «Central limit theorems and weak laws of large numbers in certain Banach spaces». *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 62 (3) (1983), 323–354.

[A34] GINÉ, E.; ZINN, J. «Some limit theorems for empirical processes. With discussion». *Ann. Probab.*, 12 (4) (1984), 929–998.

[A35] GINÉ, E.; HAHN, M. G. «Characterization and domains of attraction of p-stable random compact sets». *Ann. Probab.*, 13 (2) (1985), 447–468.

[A36] GINÉ, E.; HAHN, M. G. «The Lévy-Hinčin representation for random compact convex subsets which are infinitely divisible under Minkowski addition». *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 70 (2) (1985), 271–287.

[A37] GINÉ, E.; HAHN, M. G. «M-infinitely divisible random compact convex sets». A: *Probability in Banach Spaces, V* (Medford, Mass., 1984). Berlín: Springer, 1985, 226–248. (Lecture Notes in Math.; 1153)

[A38] GINÉ, E.; MARCUS, M. B.; ZINN, J. «A version of Chevet's theorem for stable processes». *J. Funct. Anal.*, 63 (1) (1985), 47–73.

[A39] GINÉ, E.; ZINN, J. «On the approximation of p-homogeneous functions in Banach spaces». A: *Homenatge a Francesc Sales*. Barcelona: Universitat de Barcelona, 1985, 78–87.

[A40] GINÉ, E.; ZINN, J. «Lectures on the central limit theorem for empirical processes». A: *Probability and Banach Spaces* (Zaragoza, 1985). Berlín: Springer, 1986, 50–113. (Lecture Notes in Math.; 1221)

[A41] GINÉ, E.; ZINN, J. «Empirical processes indexed by Lipschitz functions». *Ann. Probab.*, 14 (4) (1986), 1329–1338.

[A42] Giné, E.; Zinn, J. «A remark on the central limit theorem for random measures and processes». A: *Probability Theory and Mathematical Statistics, Vol. I* (Vilnius, 1985). Utrecht: VNU Sci. Press, 1987, 483–487.

[A43] Giné, E.; Zinn, J. «The law of large numbers for partial sum processes indexed by sets». *Ann. Probab.*, 15 (1) (1987), 154–163.

[A44] Andersen, N. T.; Giné, E.; Ossiander, M.; Zinn, J. «The central limit theorem and the law of iterated logarithm for empirical processes under local conditions». *Probab. Theory Related Fields*, 77 (2) (1988), 271–305.

[A45] Andersen, N. T.; Giné, E.; Zinn, J. «The central limit theorem for empirical processes under local conditions: the case of Radon infinitely divisible limits without Gaussian component». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 308 (2) (1988), 603–635.

[A46] Arcones, M. A.; Giné, E. «The bootstrap of the mean with arbitrary bootstrap sample size». *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 25 (4) (1989), 457–481.

[A47] Giné, E.; Zinn, J. «Necessary conditions for the bootstrap of the mean». *Ann. Statist.*, 17 (2) (1989), 684–691.

[A48] Giné, E.; Zinn, J. «Discussion of D. Pollard's paper». Asymptotics via empirical processes. *Statistical Science*, 4 (1989), 355–356.

[A49] Giné, E.; Zinn, J. «L_p multipliers in the central limit theorem with p-stable limit». A: *Probability Theory on Vector Spaces, IV* (Łańcut, 1987). Berlín: Springer, 1989, 74–81. (Lecture Notes in Math.; 1391)

[A50] Giné, E.; Hahn, M. G.; Vatan, P. «Max-infinitely divisible and max-stable sample continuous processes». *Probab. Theory Related Fields*, 87 (2) (1990), 139–165.

[A51] Giné, E.; Marcus, M. B.; Zinn, J. «On random multipliers in the central limit theorem with p-stable limit, $0 < p < 2$». A: *Probability in Banach Spaces, 6* (Sandbjerg, 1986). Boston, Mass.: Birkhäuser Boston, 1990, 120–149. (Progr. Probab.; 20)

[A52] Giné, E.; Zinn, J. «Bootstrapping general empirical measures». *Ann. Probab.*, 18 (2) (1990), 851–869.

[A53] Arcones, M. A.; Giné, E. «Some bootstrap tests of symmetry for univariate continuous distributions». *Ann. Statist.*, 19 (3) (1991), 1496–1511.

[A54] Arcones, M. A.; Giné, E. «Additions and correction to: "The bootstrap of the mean with arbitrary bootstrap sample size"» [*Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 25 (4) (1989), 457–481]. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 27 (4) (1991), 583–595.

[A55] Dudley, R. M.; Giné, E.; Zinn, J. «Uniform and universal Glivenko-Cantelli classes». *J. Theoret. Probab.*, 4 (3) (1991), 485–510.

[A56] Giné, E.; Zinn, J. «Gaussian characterization of uniform Donsker classes of functions». *Ann. Probab.*, 19 (2) (1991), 758–782.

[A57] ARCONES, M. A.; GINÉ, E. «On the bootstrap of U and V statistics». *Ann. Statist.*, 20 (2) (1992), 655–674.

[A58] ARCONES, M. A.; GINÉ, E. «On the bootstrap of M-estimators and other statistical functionals». A: *Exploring the Limits of Bootstrap* (East Lansing, MI, 1990). Nova York: Wiley, 1992, 13–47. (Wiley Ser. Probab. Math. Statist. Probab. Math. Statist.)

[A59] GINÉ, E.; ZINN, J. «On Hoffmann-Jørgensen's inequality for U-processes». A: *Probability in Banach Spaces, 8* (Brunswick, ME, 1991). Boston, Mass.: Birkhäuser Boston, 1992, 80–91. (Progr. Probab.; 30)

[A60] GINÉ, E.; ZINN, J. «Marcinkiewicz type laws of large numbers and convergence of moments for U-statistics». A: *Probability in Banach Spaces, 8* (Brunswick, ME, 1991). Boston, Mass.: Birkhäuser Boston, 1992, 273–291. (Progr. Probab.; 30)

[A61] ALAMAYEHU, D.; DE LA PEÑA, V.; GINÉ, E. «Bootstrap goodness of fit tests based on the empirical distribution function». A: TARTER, M. E.; LOOK, M. D. (ed.). *Computing Science and Statistics: Proceedings of the 25th Annual Symposium on the Interface.* Virginia: Interface Foundation of North America, Fairfax Station, 1993, 228–233.

[A62] ARCONES, M. A.; GINÉ, E. «On decoupling, series expansions, and tail behavior of chaos processes». *J. Theoret. Probab.*, 6 (1) (1993), 101–122.

[A63] ARCONES, M. A.; GINÉ, E. «Limit theorems for U-processes». *Ann. Probab.*, 21 (3) (1993), 1494–1542.

[A64] ARCONES, M. A.; CHEN, Z.; GINÉ, E. «Estimators related to U-processes with applications to multivariate medians: asymptotic normality». *Ann. Statist.*, 22 (3) (1994), 1460–1477.

[A65] ARCONES, M. A.; GINÉ, E. «U-processes indexed by Vapnik-Červonenkis classes of functions with applications to asymptotics and bootstrap of U-statistics with estimated parameters». *Stochastic Process. Appl.*, 52 (1) (1994), 17–38.

[A66] GINÉ, E.; ZINN, J. «A remark on convergence in distribution of U-statistics». *Ann. Probab.*, 22 (1) (1994), 117–125.

[A67] GINÉ-MASDÉU, E. «Processos empírics i aplicacions: visió general amb biaix». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 9 (1994), 7–34.

[A68] ARCONES, M. A.; GINÉ, E. «On the law of the iterated logarithm for canonical U-statistics and processes». *Stochastic Process. Appl.*, 58 (2) (1995), 217–245.

[A69] CUZICK, J.; GINÉ, E.; ZINN, J. «Laws of large numbers for quadratic forms, maxima of products and truncated sums of i.i.d. random variables». *Ann. Probab.*, 23 (1) (1995), 292–333.

[A70] GINÉ, E. «Empirical processes and applications: an overview». With a discussion by Jon A. Wellner and a rejoinder by the author. *Bernoulli*, 2 (1) (1996), 1–38.

[A71] Giné, E.; Zhang, C.-H. «On integrability in the LIL for degenerate U-statistics». *J. Theoret. Probab.*, 9 (2) (1996), 385–412.

[A72] Giné, E. «Lectures on some aspects of the bootstrap». A: *Lectures on Probability Theory and Statistics* (Saint-Flour, 1996). Berlín: Springer, 1997, 37–151. (Lecture Notes in Math.; 1665)

[A73] Giné, E. «Decoupling and limit theorems for U-statistics and U-processes». A: *Lectures on Probability Theory and Statistics* (Saint-Flour, 1996). Berlín: Springer, 1997, 1–35. (Lecture Notes in Math.; 1665)

[A74] Giné, E.; Götze, F.; Mason, D. M. «When is the Student t-statistic asymptotically standard normal?». *Ann. Probab.*, 25 (3) (1997), 1514–1531.

[A75] Giné, E.; Wellner, J. A. «Uniform convergence in some limit theorems for multiple particle systems». *Stochastic Process. Appl.*, 72 (1) (1997), 47–72.

[A76] Giné, E. «A consequence for random polynomials of a result of de la Peña and Montgomery-Smith». A: *High Dimensional Probability* (Oberwolfach, 1996). Basel: Birkhäuser, 1998, 103–110. (Progr. Probab.; 43)

[A77] Giné, E.; Mason, D. M. «On the LIL for self-normalized sums of IID random variables». *J. Theoret. Probab.*, 11 (2) (1998), 351–370.

[A78] del Barrio, E.; Giné, E.; Matrán, C. «Central limit theorems for the Wasserstein distance between the empirical and the true distributions». *Ann. Probab.*, 27 (2) (1999), 1009–1071.

[A79] Giné, E.; Guillou, A. «Laws of the iterated logarithm for censored data». *Ann. Probab.*, 27 (4) (1999), 2042–2067.

[A80] Giné, E.; Latała, R.; Zinn, J. «Exponential and moment inequalities for U-statistics». A: *High Dimensional Probability, II* (Seattle, WA, 1999). Boston, Mass.: Birkhäuser Boston, 2000, 13–38. (Progr. Probab.; 47)

[A81] Giné, E.; Mason, D.; Wellner, J. A. (ed.). *High Dimensional Probability, II* (Seattle, WA, 1999). Boston, Mass.: Birhhäuser Boston, 2000. (Progr. Probab.; 47)

[A82] Koltchinskii, V.; Giné, E. «Random matrix approximation of spectra of integral operators». *Bernoulli*, 6 (1) (2000), 113–167.

[A83] Giné, E.; Guillou, A. «On consistency of kernel density estimators for randomly censored data: rates holding uniformly over adaptive intervals». *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 37 (4) (2001), 503–522.

[A84] Giné, E.; Kwapień, S.; Latała, R.; Zinn, J. «The LIL for canonical U-statistics of order 2». *Ann. Probab.*, 29 (1) (2001), 520–557.

[A85] Giné, E.; Guillou, A. «Rates of strong uniform consistency for multivariate kernel density estimators». *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 38 (6) (2002), 907–921. [En l'honor de J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle, I. Ibragimov]

[A86] del Barrio, E.; Giné, E.; Matrán, C. «Correction: "Central limit theorems for the Wasserstein distance between the empirical and the true distributions"» [*Ann. Probab.*, 27 (2) (1999), 1009–1071]. *Ann. Probab.*, 31 (2) (2003), 1142–1143.

[A87] Giné, E.; Houdré, C.; Nualart, D. (ed.). *Stochastic Inequalities and Applications*. Basel: Birkhauser, 2003. (Progr. Probab.; 56)

[A88] Giné, E.; Koltchinskii, V.; Sakhanenko, L. «Convergence in distribution of self-normalized sup-norms of kernel density estimators». A: *High Dimensional Probability, III* (Sandjberg, 2002). Basel: Birkhäuser, 2003, 241–253. (Progr. Probab.; 55)

[A89] Giné, E.; Koltchinskii, V.; Wellner, J. A. «Ratio limit theorems for empirical processes». A: *Stochastic Inequalities and Applications*. Basel: Birkhäuser, 2003, 249–278. (Progr. Probab.; 56)

[A90] Giné, E.; Mason, D. M.; Zaitsev, A. Yu. «The L_1-norm density estimator process». *Ann. Probab.*, 31 (2) (2003), 719–768.

[A91] Chen, Z.; Giné, E. «Another approach to asymptotics and bootstrap of randomly trimmed means». *Ann. Inst. Statist. Math.*, 56 (4) (2004), 771–790.

[A92] Giné, E.; Götze, F. «On standard normal convergence of the multivariate Student t-statistic for symmetric random vectors». *Electron. Comm. Probab.*, 9 (2004), 162–171 (electronic).

[A93] Giné, E.; Koltchinskii, V.; Sakhanenko, L. «Kernel density estimators: convergence in distribution for weighted sup-norms». *Probab. Theory Related Fields*, 130 (2) (2004), 167–198.

[A94] Giné, E.; Koltchinskii, V.; Zinn, J. «Weighted uniform consistency of kernel density estimators». *Ann. Probab.*, 32 (3B) (2004), 2570–2605.

[A95] Giné, E.; Mason, D. M. «The law of the iterated logarithm for the integrated squared deviation of a kernel density estimator». *Bernoulli*, 10 (4) (2004), 721–752.

[A96] del Barrio, E.; Giné, E.; Utzet, F. «Asymptotics for L_2 functionals of the empirical quantile process, with applications to tests of fit based on weighted Wasserstein distances». *Bernoulli*, 11 (1) (2005), 131–189.

[A97] Giné, E; Koltchinskii, V. «Empirical graph Laplacian approximation of Laplace-Beltrami operators: large sample results». A: *High Dimensional Probability*. Beachwood, Ohio: Inst. Math. Statist., 2006, 238–259. (IMS Lecture Notes Monogr. Ser.; 51)

[A98] Giné, E.; Koltchinskii, V. «Concentration inequalities and asymptotic results for ratio type empirical processes». *Ann. Probab.*, 34 (3) (2006), 1143–1216.

[A99] Giné, E.; Koltchinskii, V.; Li, W.; Zinn, J. (ed.). *High Dimensional Probability*. Proceedings of the Fourth International Conference. Beachwood, Ohio: Inst. Math. Statist., 2006. (IMS Lecture Notes Monogr. Ser.; 51)

[A100] Giné, E.; Mason, D. M. «On local U-statistic processes and the estimation of densities of functions of several sample variables». *Ann. Statist.*, 35 (3) (2007), 1105–1145.

[A101] Giné, E.; Mason, D. M. «Laws of the iterated logarithm for the local U-statistic process». *J. Theoret. Probab.*, 20 (3) (2007), 457–485.

[A102] Giné, E.; Mason, D. M. «Uniform in bandwidth estimation of integral functionals of the density function». *Scand. J. Statist.*, 35 (4) (2008), 739–761.

[A103] Giné, E.; Nickl, R. «Uniform central limit theorems for kernel density estimators». *Probab. Theory Related Fields*, 141 (3–4) (2008), 333–387.

[A104] Giné, E.; Nickl, R. «A simple adaptive estimator of the integrated square of a density». *Bernoulli*, 14 (1) (2008), 47–61.

[A105] Giné, E.; Nickl, R. «Adaptation on the space of finite signed measures». *Math. Methods Statist.*, 17 (2) (2008), 113–122.

[A106] Giné, E.; Nickl, R. «An exponential inequality for the distribution function of the kernel density estimator, with applications to adaptive estimation». *Probab. Theory Related Fields*, 143 (3–4) (2009), 569–596.

[A107] Giné, E.; Nickl, R. «Uniform limit theorems for wavelet density estimators». *Ann. Probab.*, 37 (4) (2009), 1605–1646.

[A108] Giné, E.; Koltchinskii, V.; Norvaiša, R. (ed.). *Selected Works of R. M. Dudley*. Nova York: Springer, 2010.

[A109] Giné, E.; Nickl, R. «Adaptive estimation of a distribution function and its density in sup-norm loss by wavelet and spline projections». *Bernoulli*, 16 (4) (2010), 1137–1163.

[A110] Giné, E.; Nickl, R. «Confidence bands in density estimation». *Ann. Statist.*, 38 (2) (2010), 1122–1170.

[A111] Giné, E.; Sang, H. «Uniform asymptotics for kernel density estimators with variable bandwidths». *J. Nonparametr. Stat.*, 22 (5–6) (2010), 773–795.

[A112] Giné, E.; Güntürk, C. S.; Madych, W. R. «On the periodized square of L^2 cardinal splines». *Exp. Math.*, 20 (2) (2011), 177–188.

[A113] Giné, E.; Nickl, R. «Rates of contraction for posterior distributions in L^r-metrics, $1 \leq r \leq \infty$». *Ann. Statist.*, 39 (6) (2011), 2883–2911.

[A114] Giné, E.; Sang, H. «On the estimation of smooth densities by strict probability densities at optimal rates in sup-norm». A: *From Probability to Statistics and Back: High-Dimensional Models and Processes*. Beachwood, Ohio: Inst. Math. Statist., 2013, 128–149. (Inst. Math. Stat. (IMS) Collect.; 9)

[A115] Giné, E.; Madych, W. R. «On wavelet projection kernels and the integrated squared error in density estimation». *Statist. Probab. Lett.*, 91 (2014), 32–40.

Referències

[1] Adamczak, R. «Moment inequalities for U-statistics». *Ann. Probab.*, 34 (6) (2006), 2288–2314.

[2] Adamczak, R.; Latała, R. «The LIL for canonical U-statistics». *Ann. Probab.*, 36 (3) (2008), 1023–1058.

[3] Bickel, P. J.; Freedman, D. A. «Some asymptotic theory for the bootstrap». *Ann. Statist.*, 9 (6) (1981), 1196–1217.

[4] Chernozhukov, V.; Chetverikov, D.; Kato, K. «Anti-concentration and honest, adaptive confidence bands». *Ann. Statist.*, 42 (5) (2014), 1787–1818.

[5] de la Peña, V. H. «Decoupling and Khintchine's inequalities for U-statistics». *Ann. Probab.*, 20 (4) (1991), 1877–1892.

[6] de la Peña, V. H.; Montgomery-Smith, S. J. «Bounds on the tail probability of U-statistics and quadratic forms». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31 (2) (1994), 223–227.

[7] de la Peña, V. H.; Montgomery-Smith, S. J.; Szulga, J. «Contraction and decoupling inequalities for multilinear forms and U-statistics». *Ann. Probab.*, 22 (4) (1994), 1745–1765.

[8] Dehling, H. «The functional law of the iterated logarithm for von Mises functionals and multiple Wiener integrals». *J. Multivariate Anal.*, 28 (2) (1989), 177–189.

[9] Dudley, R. M. «Sample functions of the Gaussian process». *Ann. Probability*, 1 (1) (1973), 66–103.

[10] Dudley, R. M. «Central limit theorems for empirical measures». *Ann. Probab.*, 6 (6) (1978), 899–929 (1979).

[11] Efron, B. «Student's t-test under symmetry conditions». *J. Amer. Statist. Assoc.*, 64 (1969), 1278–1302.

[12] Efron, B. «Bootstrap methods: another look at the jackknife». *Ann. Statist.*, 7 (1) (1979), 1–26.

[13] Halmos, P. R. «The theory of unbiased estimation». *Ann. Math. Statistics*, 17 (1946), 34–43.

[14] Hoeffding, W. «Probability inequalities for sums of bounded random variables». *J. Amer. Statist. Assoc.*, 58 (1963), 13–30.

[15] Hoffmann, M.; Nickl, R. «On adaptive inference and confidence bands». *Ann. Statist.*, 39 (5) (2011), 2383–2409.

[16] Hotelling, H. «The behavior of some standard statistical tests under nonstandard conditions». A: *Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.* Vol. I. Berkeley: Univ. California Press, 1961, 319–359.

[17] Kendall, D. G. «Foundations of a theory of random sets». A: *Stochastic Geometry (a tribute to the memory of Rollo Davidson)*. Londres: Wiley, 1974, 322–376.

[18] KOLTCHINS'KIĬ, V. I. «On the central limit theorem for empirical measures». *Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist.*, 24 (1981), 63–75, 152. [Traducció a l'anglès: *Theory Probab. Math. Statist.*, 24 (1982), 71–82]

[19] LE CAM, L. «A remark on empirical measures». A: *A Festschrift for Erich L. Lehmann*. Belmont, Calif.: Wadsworth, 1983, 305–327. (Wadsworth Statist./Probab. Ser.)

[20] LEDOUX, M.; TALAGRAND, M. «Conditions d'intégrabilité pour les multiplicateurs dans le TLC banachique». *Ann. Probab.*, 14 (3) (1986), 916–921.

[21] LEDOUX, M.; TALAGRAND, M. «Un critère sur les petites boules dans le théorème limite central». *Probab. Theory Related Fields*, 77 (1) (1988), 29–47.

[22] LEPSKIĬ, O. V. «A problem of adaptive estimation in Gaussian white noise». *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 35 (3) (1990), 459–470. [Traducció a l'anglès: *Theory Probab. Appl.*, 35 (3) (1990), 454–466 (1991)]

[23] LOGAN, B. F.; MALLOWS, C. L.; RICE, S. O.; SHEPP, L. A. «Limit distributions of self-normalized sums». *Ann. Probability*, 1 (1973), 788–809.

[24] MALLER, R. A. «A theorem on products of random variables, with application to regression». *Austral. J. Statist.*, 23 (2) (1981), 177–185.

[25] MATHERON, G. *Random sets and integral geometry*. Nova York; Londres; Sydney: John Wiley & Sons, 1975.

[26] NICKL, R.; REIß, M. «A Donsker theorem for Lévy measures». *J. Funct. Anal.*, 263 (10) (2012), 3306–3332.

[27] NICKL, R.; REIß, M.; SÖHL, J.; TRABS, M. «High frequency Donsker theorems for Lévy measures». *Probab. Theory Related Fields*, 164 (1–2) (2016), 61–108.

[28] NICKL, R.; SÖHL, J. «Nonparametric Bayesian posterior contraction rates for discretely observed scalar diffusions». Preprint (2015), disponible a `arXiv:1510.05526`.

[29] NOLAN, D.; POLLARD, D. «U-processes: rates of convergence». *Ann. Statist.*, 15 (2) (1987), 780–799.

[30] NOLAN, D.; POLLARD, D. «Functional limit theorems for U-processes». *Ann. Probab.*, 16 (3) (1988), 1291–1298.

[31] POLLARD, D. «A central limit theorem for empirical processes». *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 33 (2) (1982), 235–248.

[32] RAY, K. «Bayesian inverse problems with non-conjugate priors». *Electron. J. Stat.*, 7 (2013), 2516–2549.

[33] SZABÓ, B.; VAN DER VAART, A. W.; VAN ZANTEN, J. H. «Frequentist coverage of adaptive nonparametric Bayesian credible sets (with discussion)». *Ann. Statist.*, 43 (4) (2015), 1391–1428.

[34] TALAGRAND, M. «New concentration inequalities in product spaces». *Invent. Math.*, 126 (3) (1996), 505–563.

[35] v. Mises, R. «On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions». *Ann. Math. Statistics*, 18 (1947), 309–348.

[36] Vapnik, V. N.; Chervonenkis, A. Ya. «Necessary and sufficient conditions for the uniform convergence of empirical means to their true values». *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 26 (3) (1981), 543–563. [Traducció a l'anglès: *Theory Probab. Appl.*, 26 (3) (1981), 532–553]

Vladimir Koltchinskii
School of Mathematics
Georgia Institute of Technology
Atlanta, GA 30332-0160
vlad@math.gatech.edu

Richard Nickl
Center for Mathematical Sciences
CB3 0WB Cambridge
United Kingdom
r.nickl@statslab.cam.ac.uk

Sara van de Geer
Seminar for Statistics
ETH Zurich
Ramistrasse 101
8092 Zürich
geer@stat.math.ethz.ch

Jon A. Wellner
Department of Statistics
B313 Padelford Hall
Northeast Stevens Way
University of Washington
Seattle, WA 98195
jaw@stat.washington.edu