1 Les idées de Green

C'est en 1828 dans son "'*Essay on the applications of analysis to the theory of electricity and magnetism*" que Green utilise l'identité qui portera désormais son nom :

$$\int_D (u\triangle v - v\triangle u)dm = \int_{\partial D}(u\partial_n v - v\partial_n u)d\sigma,$$

où D est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ de bord, $\partial_n f$ la dérivée normale d'une fonction f et σ la mesure surfacique [1]. Appliquons cette formule à une fonction harmonique v et au potentiel électrostatique (ou gravitationnel) crée en y par une charge (une masse) placée en un point x de D [2] : $y \mapsto g_x(y) := g(x,y) := \frac{1}{|x-y|}$, qui est harmonique dans tout ouvert ne contenant pas la singularité x. Utilisons donc cette formule, non pas sur D mais sur le complémentaire dans D d'une petite boule $B(x,r)$ contenue dans D, sur lequel v et g_x sont toutes deux harmoniques :

$$0 = \int_{\partial D}(g_x\partial_n v - v\partial_n g_x)d\sigma + \int_{S(x,r)}(\frac{1}{r}\partial_n v - \frac{v}{r^2})d\sigma \tag{1.0.1}$$

La seconde intégrale s'évalue à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires par : $(\frac{1}{r}\partial_n v(y') - \frac{v(y'')}{r^2})4\pi r^2$, pour y' et y'' dans $S(x,r)$. v étant harmonique sur D, $\partial_n v(y')$ est bornée et $v(y'') \to v(x)$, lorsque r tend vers 0 ; de ce fait l'égalité (1.0.1) donne l'identité :

$$-4\pi v(x) = \int_D (\partial_n g_x v - g_x \partial_n v)d\sigma,$$

valable pour tout $x \in D$. On connait donc v à l'intérieur de D si on connait sa restriction au bord de D, ainsi que sa dérivée normale. On peut se débarrasser de cette dérivée normale par l'habile manipulation qui suit...

Pour toute fonction h_x, harmonique sur D, la formule de Green nous fournit l'égalité : $0 = \int_{\partial D}(\partial_n h_x v - h_x\partial_n v)d\sigma$; lui soustrayant la précédente, on obtient :

$$4\pi v(x) = \int_{\partial D}(\partial_n(h_x - g_x)v - (h_x - g_x)\partial_n v)d\sigma$$

[1] Qu'il faille que D soit régulier pour que la formule soit valide ne préoccupa pas beaucoup Green...

[2] A une constante près.

Si donc on trouve une fonction h_x harmonique sur D, valant g_x sur le bord de D, on aura décrit $v(x)$ à l'aide des seules valeurs de v sur ∂D :

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \partial_n (h_x - g_x) v d\sigma.$$

Trouver une telle fonction h_x est l'objet du ***problème de Dirichlet***. Pour Green, il n'y avait pas de problème ! h_x est le potentiel crée en x par une distribitution uniforme de charge sur ∂D. Si éclairante que soit cette intuition, on va voir qu'une telle fonction n'existe pas toujours...

2 Probabilités et potentiel

2.1 Le mouvement brownien

Il s'agira pour nous d'une variable aléatoire [3] X à valeurs dans l'espace des fonctions continues allant de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifiant les trois conditions suivantes [4] :

$$\begin{cases} X_0 \text{ est presque sûrement nulle ;} \\ X \text{ est à accroissements indépendants : pour tous } 0 < t_1 < ... < t_n, \\ \text{les } \textit{variables aléatoires } X_{t_1},\ X_{t_2} - X_{t_1}, ...,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \text{ sont indépendantes ;} \\ \text{ces accroissements sont stationnaires : } X_t - X_s \text{ a même loi que } X_{t-s}, \\ X_r \text{ ayant pour loi une loi normale centrée, de moyenne } r. \end{cases}$$

Plus précisément, définir X revient à mettre sur le mythique $(\Omega, \mathcal{A})$ [5] une probabilité $\mathbb{P}$ qui ne charge que les trajectoires issues de 0, dont les "portions" de trajectoires sont indépendantes, etc.

[3] Rappelons qu'une variable aléatoire est une fonction mesurable d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans un autre espace mesuré.

[4] Chaque $X(\omega)$ est donc une fonction continue dont on note $X_t(\omega)$ la valeur au temps t (cette fonction de ω étant mesurable) ; une autre façon de voir X est de la regarder comme une collection $\{X_t\}_{t\geq 0}$ de variables aléatoires indexées par le temps et qui se comportent bien les une vis-à-vis des autres ; c'est ce point de vue que met en avant la présente définition.

[5] Levons le mystère sur ce mystérieux Ω : c'est l'ensemble des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans l'espace ambiant (ici $\mathbb{R}^3$)... cela éclaire la suite de la phrase.

Que l'on puisse mettre sur un $(\Omega, \mathcal{A})$ une telle probabilité n'a absolument rien d'évident [6] !

Pour mettre en avant le fait que X est à valeurs dans un espace de fonctions on parlera de X comme d'un *processus* [7] et non pas comme d'une variable aléatoire, terme réservé aux évaluations de X en des temps précis : les X_t.

Si l'on veut que notre mouvement brownien soit issu non pas de 0 mais d'un point x quelconque, on considèrera le processus $x + X$, dont on notera $\mathbb{P}_x$ la loi et $\mathbb{E}_x$ l'espérance associée.

Comment obtenir des informations sur X à partir des seules définitions ?... On n'est pas si démunis qu'on peut le penser : X_t ayant pour loi une normale de moyenne x, de variance t (ce qu'on note $X_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(x,t)$) les quantités $\mathbb{P}_x(X_t \in A)$, pour un borélien A, sont données par $\int_A p_t(x,y)dy$, où $p_t(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp(\frac{-|x-y|^2}{2t})$ est la densité d'une loi $\mathcal{N}(x,t)$. On sait donc calculer des quantités comme :

$$\mathbb{E}_x[f(X_t)] = \int p_t(x,y)f(y)dy^8,$$

quantités *importantissima* pour la suite, descriptions partielles du processus via son observation aux temps t.

Une fois un processus donné, on peut construire de nouvelles variables aléatoires... Par exemple, on pourra considérer, pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^{+\infty} f(X_t(\omega))dt.$$

Mais attention ! Rien ne nous dit que cela définit bien une fonction de ω qui soit mesurable [9] ; c'est heureusement le cas pourvu lorsque f est sympathique (continue à support compact, par exemple). Si f est l'indicatrice d'une partie

[6] C'est à Wiener qu'on doit la première construction du mouvement brownien ; elle date d'environ 1924. On en trouve une magnifique construction dans l'esprit de l'originale dans *Diffusions, Markov processes and martingales*, de D. Williams, dont je ne saurais assez recommander la lecture.

[7] C'est le terme consacré.

[8] Ce f est, par exemple, une fonction continue, nulle à l'infini.

[9] relativement aux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$.

A [10], cette variable aléatoire représente le temps passé par la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ dans A, ou, si l'on préfère, le temps passé dans A par la "particule" qui suit une trajectoire brownienne décrite par la fonction précédente.

Calculons le temps moyen passé par une "particule brownienne" dans A :

$$\mathbb{E}_x[\int_0^{+\infty} f(X_t)dt] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_x[f(X_t)]dt. \tag{2.1.1}$$

2.2 L'opérateur potentiel

Il est temps maintenant de mettre sur le devant de la scène l'extraordinaire égalité suivante, qui relie la densité $p_t(x,y)$ de la loi au temps t d'un brownien issu de x et le potentiel créé au point y par une charge placée en x :

$$\int_0^{+\infty} p_t(x,y)dt = \frac{1}{2\pi|x-y|}.$$

Si l'on associe à une fonction f continue, à support compact, le potentiel $U^f(m)$, en un point m, associé à la répartition de charge f, $U^f(m) = \int \frac{f(\xi)}{|m-\xi|}d\xi$, on observe que

$$\begin{aligned} U^f(m) = \int (2\pi \int_0^{+\infty} p_t(x,y)f(y)dt)dy &= 2\pi \int_0^{+\infty} (\int p_t(x,y)f(y)dy)dt \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_x[f(X_t)]dt \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

c'est exactement la quantité (2.1.1), au terme parasite 2π près ! Avec pour f l'indicatrice de A, cela se réinterprète en disant que *le temps moyen passé par un mouvement brownien issu de x dans un borélien A est* [11] *le potentiel créé en x par une répartition de charge uniforme sur A.*

[10] un borélien évidemment, ce qu'on supposera sans le dire toutes les fois que nécessaire.
[11] Au 2π près.

3 Temps aléatoires

A la vue de la définition du mouvement brownien donnée ci-dessus, on pourrait croire que l'étude d'un tel processus se résume à l'étude des lois finies dimensionnelles, *i.e.* des quantités $\mathbb{E}[f(X_t)]$. Il n'en est rien ! Un processus stochastique est bien plus que cela, notamment du fait de l'existence de temps aléatoires liésa X et que les $\mathbb{E}[f(X_t)]$ sont incapables de décrire.

Le plus important pour nous sera le ***temps d'atteinte d'une partie*** $A \in \mathbb{R}^3$:

$$T_A(\omega) := \inf\{0 < t < \infty; X_t(\omega) \in A\}$$

Qu'on définisse ainsi une fonction mesurable de ω n'a rien d'évident, c'est cependant le cas si A est un borélien. Lorsque A est le complémentaire d'une partie B, on parle de ***temps de sortie de*** B, qu'on note $S_B(\omega)$. *B sera pour nous un ouvert borné.*

Si le temps en soi nous intéresse, c'est surtout la position au temps de sortie qui va nous importer. Cette position (aléatoire) est décrite de façon probabiliste par les quantités : $\mathbb{P}_x(X_{S_B} \in C)$, C borélien. Du fait de la continuité du mouvement brownien, on peut déjà dire que si $x \in \overline{B}$, X_{S_B} appartient presque sûrement à ∂B ; de plus, si $x \notin \overline{B}$, S_B est presque sûrement égal à 0 et X_{S_B} égal à x.

Les $\{\mathbb{P}_x(X_{S_B} \in C)\}_C$ définissent une *mesure* [12] sur ∂B tantôt appelée mesure de sortie associée à x, tantôt ***mesure harmonique associée à*** x. On la note $H_B(x, .)$; vue comme forme linéaire sur les fonctions continues sur ∂B, elle est définie par : $H_B f(x) := \mathbb{E}_x[f(X_{S_B})]$; cette fonction de x est mesurable [13], elle jouit même d'une propriété beaucoup plus forte :

Proposition 3.1. *$H_B f$ est harmonique* [14] *sur B.*

$\lhd$ Soit x un point de B et $B(x, r)$ une boule centrée en x, de rayon r, incluse dans B. Enonçons d'abord deux faits généraux sur le mouvement brownien avant d'en venir au coeur de la démonstration.

(a) $\{|X_t|\}_{t \geq 0}$ tend $\mathbb{P}_x$ presque sûrement vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$; de ce fait (presque) toute trajectoire (issue de x) rencontre $B(x, r)$, $H_{B(x,r)}(x, .)$ est donc une probabilité sur la shère $S(x, r)$;

[12] il n'y a aucune raison a priori pour que cette *mesure* soit une probabilité.

[13] C'est un fait non immédiat.

[14] Une fonction $g : D \to \mathbb{R}^3$ est harmonique si et seulement si pour tout x de D et tout $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset D$, $g(x) = \int_{B(x,r)} g(y)dy$; il suffit que $g(x) = \int_{S(x,r)} g(y)d\sigma(y)$ (σ la mesure surfacique sur la sphère) pour que la condition précédente soit remplie.

(b) quelle que soit la rotation Φ de centre x, les processus X et $\Phi(X)$ ont même loi [15] ; de ce fait, la mesure de sortie $H_{B(x,r)}(x,.)$ doit être invariante par rotation, c'est donc la probabilité uniforme sur $S(x,r)$, notée σ.

Rappelons aussi que lorsqu'on conditionne une variable aléatoire U par une autre variable aléatoire V, on obtient une "fonction" de V, qu'on note $\mathbb{E}[U|V]$, et que si ν désigne la loi image de V, alors on a :

$$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U|V]] = \int \mathbb{E}[U|V](v)d\nu(v)$$

Si par exemple $U = f(X_{S_B})$ et $V = X_{S_{B(x,r)}}$, $\mathbb{E}[U|V](v) = \mathbb{E}_v[f(X_{S_B})]$.

Ces remarques faites, et puisque X passe par $B(x,r)$ avant de toucher le bord de B, on va calculer $\mathbb{E}_x[f(X_{S_B})]$ en conditionnant par rapport à la position de X au temps où il sort de $B(x,r)$:

$$\begin{aligned} H_B f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_{S_B})] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[f(X_{S_B})|X_{S_{B(x,r)}}]] \\ &= \int \mathbb{E}_y[f(X_{S_B})]d\sigma(y) = \int H_B f(y)d\sigma(y), \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

$H_B f$ a donc la propriété de la moyenne. $\triangleright$

4 Le problème au bord

Rappelons qu'on est à la recherche d'une fonction continue sur $\overline{B}$, harmonique sur B, et dont la restriction à ∂B est fixée (au 1, il s'agit de g_x). Cette recherche peut être vaine : si $B = B(0,1)\ \{0\}$, les seules solutions sur B à l'équation $\triangle g = 0$ sont de la forme $\alpha \ln |x| + \beta$, qui soit tendent vers ∞ en 0, soit sont constantes...

Ainsi, non seulement la valeur au bord de la fonction recherchée a de l'importance, mais c'est surtout la "forme" de B qui décide de l'existence ou non de solutions au problème de Dirichlet.

On va ici donne une condition sur la forme de B au voisinage d'un point $z \in \partial B$ pour que la fonction harmonique $H_B f$ construite au parragraphe précédent soit continue en z [16].

On dit d'un ***point*** $z \in \partial B$ qu'il est ***régulier*** si un brownien issu de z quitte (presque sûrement) immédiatement B :

$$\mathbb{E}[S_B] = 0$$

[15] Cela provient de ce que les variables X_t ont elles même des lois invariantes par rotation.

[16] *i.e.* $\lim\limits_{x \to z, x \in B} H_B f(x) = f(z)$

Il est dit ***irrégulier*** sinon.

Dans l'exemple précédent, le point 0 est irrégulier. un principe général permet de dire que $z \in \partial B$ est irrégulier si et seulement si $\mathbb{P}(S_B > 0) = 1$ (c'est ce 1 qui peut surprendre).

Nous sommes près pour énoncer le

Théorème 4.1. *Soit B un ouvert borné et $f : \partial B \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. Si $z \in \partial B$ est régulier et f continue en z alors $H_B f$ est continue en z :*

$$\lim_{x \to z, x \in B} H_B f(x) = f(z)$$

La démonstration repose essentiellement sur le fait suivant.

Lemme 4.2. *L'application $x \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{E}_x[S_B]$ est semi-continue supérieurement.*

$\lhd$ Rappelons que ces fonctions sont les limites simples, décroissantes, de fonctions continues et qu'elles sont caractérisées par l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \overline{f(y)}_{y \to x} \leq f(x)$$

Commençons par nous assurer de l'intégrabilité de S_B. Si $B \subset B(0, R)$, S_B est majoré par le temps d'atteinte des niveaux $\pm R$ de sa premièrecoordonnée (qui est un brownien réel), lequel temps est intégrable ; pour la même raison, $S_B^\varepsilon := \varepsilon \vee S_B$ est intégrable. S_B^ε décroissant vers S_B lorsque ε décroit vers 0, le théorème de convergence monotone nous donne $\mathbb{E}_x[S_B] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \searrow \mathbb{E}_x[S_B^\varepsilon]$. Mais $\mathbb{E}_x[S_B^\varepsilon] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_\varepsilon}[S_B]]$ étant de la forme $\mathbb{E}_x[g(X_\varepsilon)]$, où $g(x) := \mathbb{E}_x[S_B]$ est bornée (*on le montrera à la fin*), $\mathbb{E}_x[S_B^\varepsilon]$ est une fonction continue de x. Ainsi,

$$\overline{\lim_{y \to x}} \mathbb{E}_y[S_B] \leq \overline{\lim_{y \to x}} \mathbb{E}_y[S_B^\varepsilon] = \lim \mathbb{E}_y[S_B^\varepsilon] = \mathbb{E}_x[S_B^\varepsilon]$$

Il reste à faire tendre ε vers 0 pour conclure. $\rhd$

On n'aura maintenant aucun mal à démontrer le théorème.

$\lhd$ Soit $z \in \partial B$ un point régulier ; au vu du lemme, on doit avoir

$$\mathbb{E}_x[S_B] \underset{x \to z, x \in B}{\longrightarrow} 0.$$

Ecrivons le brownien issu de x sous la forme $x + X$ où X est un brownien issu de 0. $S(x) := S_B = \inf\{t > 0; x + X_t \in B^c\}$. La convergence précédente se réécrivant : $\mathbb{E}[S(x)] \underset{x \to z, x \in B}{\longrightarrow} 0$, cela signifie que $S(x)$ tend vers 0 dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{P}_0)$. On peut donc extraire de toute suite $\{x_n\}_{n\geq 0}$ tendant vers z une sous-suite $\{\widetilde{x}_n\}_{n\geq 0}$ telle que $\{S_{\widetilde{x}_n}\}_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers 0 ; la continuité de X nous assure alors que $\widetilde{x}_n + X_{S_{\widetilde{x}_n}}$ converge presque sûrement vers $z + X_0 = z$. Par conséquent, si f est bornée sur ∂B, continue en z le théorème de convergence dominée justifie que

$$\mathbb{E}[f(\widetilde{x}_n + X_{\widetilde{x}_n})] \to f(z),$$

c'est-à-dire

$$H_B f(\widetilde{x}_n + X_{\widetilde{x}_n}) \to f(z).$$

$H_B f(x)$ n'a donc qu'une valeur d'adhérence lorsque x tend vers z : elle est continue en z. $\triangleright$