Résumé

Frontière de Poisson d'une diffusion relativiste

Cette thèse a pour objet l'étude du comportement asymptotique d'une diffusion définie sur l'espace/temps de Minkowski. Le pendant analytique de ce problème est la détermination de l'ensemble des fonctions bornées du noyau d'un certain opÃ©rateur différentiel d'ordre 2. Utilisant des méthodes probabilistes (équations diffÃ©rentielles stochastiques, couplage), on donne une description explicite de cet ensemble de fonctions. On donne dans le même temps une toute autre démonstration de ce résultat, dans l'esprit de travaux sur les marches aléatoires, préexistant. On montre par ailleurs comment la géométrie de l'espace se reflète sur le comportement asymptotique de la diffusion. En un sens, une trajectoire (aléatoire) typique finit par se comporter comme un trajectoire de lumière.

Abstract

Poisson Boundary of a Relativistic Diffusion

In this thesis, we study the asymptotic behaviour of a diffusion defined on Minkowski's spacetime. The analytic counterpart of this problem is to determine the set of bounded functions belonging to the kernel of some second order differential operator. Using probabilistic methods (stochastic differential equations, coupling), one gives an explicit description of this set of functions. In the same time, one give a completely different proof of this result, in the spirit of preexisting works on random walks on groups. Besides, one shows how the geometry of spacetime reflects on the asymptotic behaviour of the diffusion. In some sense, a typical (random) trajectory eventually behaves as a light ray.

Mots-clef : probabilités, diffusion, opérateurs hypoelliptiques, équations différentielles stochastiques, couplage, espace/temps de Minkowski, groupes, marches aléatoires

Keywords : probability, diffusion, hypoelliptic operators, stohastic differential equations, coupling, Minkowski's spacetime, groups random walks

Chapitre 1

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude du comportement asymptotique d'un processus aléatoire défini sur l'espace/temps. On commence par motiver la description d'Einstein de l'espace/temps comme un espace lorentzien (**1**). Ces espaces admettent une famille naturelle de mouvements aléatoires continus, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, qui fut décrite par Dudley, dans [Dud66]. Le processus que l'on étudie est l'unique processus $\mathcal{C}^1$ de cette famille (**2**). On donne au **3** une description de la méthode que l'on a employée pour décrire exactement le comportement asymptotique de ce processus. Le point **4** décrit comment on peut compactifier l'espace d'état du processus et voir que celui-ci converge vers un point du bord. Une toute autre explication du comportement asymptotique du processus est donnée au **5**, en termes algébriques.

1 – La géométrie de l'espace/temps – La mécanique classique comme la mécanique relativiste reposent toutes les deux sur le choix d'une classe de cartes lisses de l'espace/temps, pour lesquelles on postule la validité du principe suivant.

Principe de Relativité. *Les équations qui décrivent les lois de la nature en fonction des coordonnées dans l'espace/temps conservent leur forme dans n'importe laquelle des cartes privilégiées.*

Deux a priori sont à la base de la mécanique classique.

a) Il existe une carte dans laquelle une particule soumise à aucune force est animée d'un mouvement de translation uniforme.

b) Le temps est une notion absolue.

Identifions l'espace/temps à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ à travers la carte donnée par le postulat **a)**. On préfère, dans un cadre physique, le terme ***référentiel*** au terme carte. Le Principe de Relativité et le postulat **b)** nous disent que les seuls changements de référentiels privilégiés sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sont de la forme

$$(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto \big(t, t\,a + \varphi(x)\big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

où φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et a un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Cette classe de référentiels sur l'espace/temps forme la classe des ***référentiels galiléens***.

L'usage de cette classe présente des difficultés connues de longue date. En mécanique classique, on décrit toutes les interactions à l'aide de fonctions dites d'énergie d'interaction potentielle, qui dépendent des positions des particules mises en jeu. Dans tous les cas, les équations dynamiques qui en découlent décrivent des phénomènes où les interactions sont instantanées. Or l'expérience tend à montrer que non seulement il n'existe aucune interaction instantanée, mais qu'il existe en plus une vitesse maximale finie de propagation des interactions. On montre que cette vitesse est celle de la lumière dans le vide. On la note traditionnellement c. Le fait que c soit finie contredit de façon flagrante la loi usuelle de composition des vitesses, qui découle des postulats **a)** et **b)** [1]. D'autres difficultés plus subtiles sont inhérentes au modèle galiléen.

Il faut attendre 1905 et l'article d'Einstein intitulé “Sur l'électrodynamique des corps en mouvement”, [Ein05], pour voir proposée une alternative au modèle galiléen de l'espace/temps et voir disparaître la notion de temps absolu.

On peut résumer les choix d'Einstein aux deux postulats suivants :

1. Il existe un référentiel de l'espace/temps dans lequel la vitesse de la lumière (dans le vide) est finie.
2. Aucun interaction ne va plus vite que la lumière.

Identifions l'espace/temps à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ à travers le référentiel du postulat 1. Le Principe de Relativité détermine (théoriquement) l'ensemble des référentiels admissibles sur l'espace/temps ; il postule en outre que la vitesse de la lumière est la même dans tous ces référentiels. On la note encore c. On peut donner de ce fait et du postulat 1 une formulation mathématique.

Notons A l'événement consistant en l'émission au temps t_A d'un signal se propageant à la vitesse de la lumière depuis un point de coordonnées (x_A, y_A, z_A) [2]. Notons B l'événement consistant en la réception du signal au temps t_B, à la position (x_B, y_B, z_B). La distance entre (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) est d'une part égale à $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ et d'autre part à $c(t_B - t_A)$, puisque la vitesse du signal est constante, égale à c. On a donc

$$c^2(t_b - t_A)^2 - \big((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2\big) = 0.$$

Si l'on repère les événements A et B dans un autre référentiel admissible par leur coordonnées (t'_A, x'_A, y'_A, z'_A) et (t'_B, x'_B, y'_B, z'_B), on doit aussi avoir

$$c^2(t'_b - t'_A)^2 - \big((x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2 + (z'_B - z'_B)^2\big) = 0,$$

puisque la vitesse de la lumière y est aussi constante, égale à c. En ces termes, le postulat 2 signifie que

$$c^2(t_b - t_A)^2 - \big((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_B)^2\big) > 0$$

si, et seulement si,

$$c^2(t'_b - t'_A)^2 - \big((x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2 + (z'_B - z'_B)^2\big) > 0.$$

Aussi l'espace/temps $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ est-il naturellement muni de la forme quadratique

$$q(t, x, y, z) = c^2\, t^2 - (x^2 + y^2 + z^2),$$

de signature $(1, -3)$. Elle permet d'associer à chaque point $A \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ le (demi-)cône $\mathcal{C}^{>0}(A)$ de sommet A formé par les événements B influençables par A : $\mathcal{C}^{>0}(A) = \big\{B \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3;\ q(B - A) > 0\big\}$. Avec ces notations, la classe des référentiels admissibles est l'ensemble des $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes f de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ tels que

$$q(B - A) > 0 \iff q\big(f(B) - f(A)\big) > 0. \tag{1.0.1}$$

On pose $c = 1$ dans la suite, ce qui revient à prendre (ct, x, y, z) comme coordonnées sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Les trois types suivants de transformations vérifient cette condition.

– Les translations de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

[1] D'après le Principe de Relativité, cette vitesse c est la même dans tout référentiel en translation uniforme (par rapport au référentiel canonique donné par le postulat 1). Choisissons un tel référentiel, en translation uniforme dans la direction x, allant à vitesse v. Si l'on envoie depuis le centre du référentiel mobile un signal allant à la vitesse de la lumière et se propageant dans la direction x, le signal doit avoir la vitesse c, vu depuis le référentiel canonique (Principe de Relativité), alors que la loi de composition des vitesses nous dit que le signal a pour vitesse $c + v$. L'égalité $c = c + v$ ne peut avoir lieu que si $c = +\infty$.

[2] (t_A, x_A, y_A, z_A) sont les coordonnées du point A dans le référentiel donné par le postulat 1.

– Les dilatations $\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto \lambda\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, $\lambda \neq 0$.
– Les isométries de q : $SO(1,3) = \{g \in GL(\mathbb{R}^4)\ \ q(g(\xi)) = q(\xi),\ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\}$.

$SO(1,3)$ est un groupe de matrices dont l'algèbre de Lie $so(1,3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^t\zeta \\ \zeta & M \end{pmatrix} ; \zeta \in \mathbb{R}^3, M \in so(3) \right\}$ est engendrée par deux sortes d'éléments :

– les ***boosts*** $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & \mathbf{0_3} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & & \mathbf{0_3} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{0_3} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$, où $\mathbf{0_3}$ est l'application nulle de $\mathbb{R}^3$,

– les ***rotations spatiales infinitésimales*** : $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & \\ & 0 & 1 & 0 \\ (0) & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & \\ & 0 & 0 & 1 \\ (0) & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & \\ & 0 & 0 & 0 \\ (0) & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On doit à Zeeman [Zee64] la preuve du fait qu'il n'y a pas d'autres transformations satisfaisant la relation (1.0.1) que les composées de transformations du type précédent.

THÉORÈME **1 (Zeeman, [Zee64]).** *Toute bijection de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ satisfaisant la relation* (1.0.1) *quels que soient les points A et B est la composée d'un nombre fini de translations, de dilatations et d'isométries de la forme quadratique q*[3]*.*

On ne retient en pratique que le groupe des isométries affines de q, engendré par les translations et les isométries de q. On note $\mathcal{G}_0$ ce groupe. L'espace/temps, muni de sa forme quadratique q et de son groupe d'isométries affines, est noté $\mathbb{R}^{1,3}$.

2 – Mouvement aléatoire naturel – Ce groupe de transformations de l'espace/temps agit sur l'ensemble des courbes $\gamma : \mathbb{R}^{\geqslant 0} \to \mathbb{R}^{1,3}$, non nécessairement continues, en envoyant γ sur $\varphi \circ \gamma$, si $\varphi \in \mathcal{G}_0$. C'est dans ce fait que géométrie et probabilités se rencontrent.

Donnons-nous un mouvement aléatoire, défini par une famille $\{\mathbb{P}_\xi\}_{\xi \in \mathbb{R}^{1,3}}$ de probabilités donnant la loi d'une trajectoire issue de ξ. Que doit-on imposer à cette famille pour que l'image par $\varphi \in \mathcal{G}_0$ d'une trajectoire issue de ξ ait même loi qu'une trajectoire issue de $\varphi(\xi)$, quel que soit $\varphi \in \mathcal{G}_0$?

Intéressons-nous plus particulièrement aux courbes aléatoires continues dont la composante temporelle croît strictement dans un certain référentiel (donc dans tous).

Dans l'espace/temps euclidien où le groupe $\mathcal{G}_0$ est remplacé par le groupe $\mathcal{G}_{\mathrm{Eucl}}$ des isométries affines euclidiennes, le temps est le même dans tous les référentiels ; on le choisit comme paramétrage des courbes aléatoires, que l'on peut supposer commencer au temps 0. Cette simplification faite, on cherche quelles lois sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{\geqslant 0}, \mathbb{R}^3)$ sont invariantes par l'action des isométries affines euclidiennes. On ne peut apporter de réponse simple à cette interrogation sans imposer quelques conditions sur la nature du mouvement aléatoire[4]. On obtient une réponse satisfaisante si l'on se restreint aux diffusion de Feller-Dynkin[5]. Dans ce cadre, on lit sur le générateur L de la diffusion l'invariance des lois du mouvement par l'action des isométries :

$$\left\{\forall\, \varphi \in \mathcal{G}_{\mathrm{Eucl}}\,,\ \forall\, \overrightarrow{\xi} \in \mathbb{R}^3,\ \varphi_*(\mathbb{P}_{\overrightarrow{\xi}}) = \mathbb{P}_{\varphi(\overrightarrow{\xi})}\right\} \iff \left\{\forall\, \varphi \in \mathcal{G}_{\mathrm{Eucl}}\,, \forall\, f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)\,,\ L(f \circ \varphi) = (Lf) \circ \varphi\right\}.$$

[3]Noter que ce théorème ne recquiert aucune régularité a priori de la part de f.

[4]Qu'on pense aux processus de Markov, aux processus non Markoviens comme ceux qui dépendent de tout leur passé, etc. Leurs structures sont très différentes.

[5]Il s'agit des processus de Markov continus, dont le domaine du générateur contient l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact. Cette dénomination est celle adoptée par Rogers & Wiliams dans [RW00], Chap.3.

L est un opérateur différentiel du second ordre, à coefficients continus. L'invariance de L par les translations nous dit que ses coefficients sont constants. En utilisant la transformation de Fourier et l'invariance de L par l'action des isométries euclidiennes, on montre alors que L doit être un multiple positif du Laplacien[6].

THÉORÈME **2.** *Les seuls opérateurs différentiels d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^3$, positifs, invariants par l'action des isométries affines euclidiennes sont les multiples positifs du laplacien.*

Soit $c \geqslant 0$. L'opérateur $c\triangle$ est le générateur du processus $\{w_{c\,t}\}_{t\geqslant 0}$, où $\{w_s\}_{s\geqslant 0}$ est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^3$.

D'autres mouvements aléatoires dans $\mathbb{R}^3$ ont une loi invariante par l'action des isométries.

- Changeons d'espace d'états et regardons l'espace tangent à $\mathbb{R}^3$: $T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Les isométries euclidiennes agissent naturellement sur $T\mathbb{R}^3$ en envoyant un point $(\overrightarrow{\xi}, v)$ sur $(\varphi(\overrightarrow{\xi}), \varphi(v))$. On définit par exemple une diffusion sur $T\mathbb{R}^3$, invariante par cette action, en posant
$$\overrightarrow{\xi}_s = \overrightarrow{\xi}_0 + \int_0^s w_r\,dr\;, \quad v_s = v_0 + w_r,$$
où $\{w_r\}_{r\geqslant 0}$ est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^3$. Il en va de même si l'on remplace w par un mouvement brownien sur la sphère [7].
- A l'opposé des processus continus, un processus sautant à intervalles de temps constants, selon une loi radiale, a aussi une loi invariante par l'action des isométries. Un mélange de sauts et de trajectoires browniennes aura encore cette propriété.

La situation sur $\mathbb{R}^{1,3}$ diffère radicalement du cas euclidien. D'abord en ce que la notion de temps dépendant du référentiel, on ne peut l'évincer du problème comme on l'a fait dans le cas euclidien. Plus fondamentalement, on cherche à modéliser l'évolution dans l'espace/temps d'un phénomène aléatoire *réel*. Ce phénomène ne pouvant se propager plus vite que la lumière, il lui correspond une courbe $\{\xi_s\}_{s\geqslant 0} = \big\{(t(s), \overrightarrow{\xi}(s))\big\}_{s\geqslant 0}$ dans $\mathbb{R}^{1,3}$ ayant les deux propriétés

1. $t(s)$ est une fonction continue, strictement croissante de s,
2. $\forall\, 0 \leqslant r \leqslant s$, $\big|\overrightarrow{\xi}(s) - \overrightarrow{\xi}(r)\big| \leqslant t(s) - t(r)$([8]).

Cette courbe est dérivable en presque tout s. On va s'intéresser aux trajectoires *de classe C^1* correspondant à un phénomène se propageant à une vitesse strictement inférieure à celle de la lumière :
$$\forall\, 0 \leqslant r \leqslant s\;,\; \big|\overrightarrow{\xi}(s) - \overrightarrow{\xi}(r)\big| < t(s) - t(r),$$
soit
$$\forall\, s \geqslant 0\,,\; q\big(\dot{\xi}(s)\big) > 0,$$
si l'on note $\{\dot{\xi}(s)\}_{s\geqslant 0}$ la dérivée de $\{\xi(s)\}_{s\geqslant 0}$. Sous cette condition, on peut reparamétrer la courbe ξ de façon à avoir $q(\dot{\xi}_s) = 1$, quel que soit $s \geqslant 0$.

Notation – On note $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{1,3}$.

DEFINITION **3.** *L'hyperboloïde $\big\{(t, \overrightarrow{\xi}) = \xi \in \mathbb{R}^{1,3};\ q(\xi) = 1\big\}$ a deux composantes connexes. On note $\mathbb{H}$ celle qui correspond à $t > 0$. Tout point de $\mathbb{H}\backslash\{\varepsilon_0\}$ s'écrit de façon unique $\big(\mathrm{ch}\rho, (\mathrm{sh}\rho)\sigma\big)$, $\rho > 0$, $\sigma \in \mathbb{S}^2$. Le couple (ρ, σ) forme les **coordonnées polaires** du point $\big(\mathrm{ch}\rho, (\mathrm{sh}\rho)\sigma\big)$.*

---

[6]La tranformée de Fourier transforme l'opérateur différentiel L en l'opérateur de multiplication par un polynôme de degré 2, qui ne doit dépendre que de la distance à l'origine, à cause de l'invariance de L par les isométries.

[7]Pour cette diffusion, $\{\xi_s\}_{s\geqslant 0}$ est récurrente en dimension 2 et transiente dès lors que la dimension est supérieure ou égale à 3. Anticipant sur les problèmes à venir, on peut montrer que cette diffusion sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ n'a pas d'autres fonctions harmoniques bornéees que les constantes.

[8]Ces propriétés, valables dans le référentiel canonique donné par le postulat 1, sont valables dans tout autre référentiel admissible.

La proposition suivante peut être prise comme définition de la géométrie de l'espace hyperbolique[9].

Proposition **4.** *La restriction de q à chaque espace tangent est définie négative. Cela fait de $\mathbb{H}$ une variété riemannienne à courbure constante, égale à -1 : $\mathbb{H}$ est un modèle de l'espace hyperbolique de dimension* 3.

$\mathbb{H}$ étant une demi-sphère unité de la forme quadratique q, est invariante par l'action d'un sous-groupe $\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}_0$, d'indice 4. Ce groupe $\mathcal{G}$ est appelé le ***groupe de Poincaré*** : c'est le produit semi-direct du groupe $SO_0(1,3)$ des isométries directes de q laissant $\mathbb{H}$ stable[10] et du groupe des translations de $\mathbb{R}^{1,3}$ (dont l'action est triviale sur l'ensemble des vecteurs vitesses). Toute isométrie de $\mathbb{H}$ provient de l'action sur $\mathbb{H}$ d'une isométrie de q ; $\mathcal{G}$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$.

On note $\triangle^{\mathbb{H}}$ le Laplacien sur $\mathbb{H}$. C'est un opérateur invariant par les isométries de $\mathbb{H}$.

La courbe (aléatoire) $\{\dot{\xi}_s\}_{s\geqslant 0}$ sur $\mathbb{H}$ déterminant la courbe $\{\xi_s\}_{s\geqslant 0}$, via la relation

$$\xi_s = \xi_0 + \int_0^s \dot{\xi}_r \, dr,$$

on est ramené à determiner l'ensemble des mouvements aléatoires sur $\mathbb{H}$, continus, dont la loi est invariante par l'action de $\mathcal{G}$. Il n'existe pas plus que dans le cadre euclidien de description simple de cet ensemble. Si l'on se restreint à la classe des diffusions de Feller-Dynkin sur $\mathbb{H}$, on obtient une description analogue à celle du théorème **2**.

Théorème **5.** *Les seuls opérateurs différentiels d'ordre* 2 *sur* $\mathbb{H}$*, invariants par l'action sur* $\mathbb{H}$ *des isométries de q sont les multiples positifs du laplacien* $\triangle^{\mathbb{H}}$.

Soit $c \geqslant 0$. L'opérateur $c\triangle^{\mathbb{H}}$ est le générateur du processus $\{w_{ct}\}_{t\geqslant 0}$, où $\{w_s\}_{s\geqslant 0}$ est un mouvement brownien sur $\mathbb{H}$.

D'autres mouvements aléatoires sur $\mathbb{H}$ ont une loi invariante par l'action de $\mathcal{G}$.

- On peut contruire sur $\mathbb{H}$ des courbes aléatoires de classe $\mathcal{C}^1$, dont la loi est invariante par l'action de $\mathcal{G}$: il suffit par exemple, partant d'un point donné $\dot{\xi}$, de choisir la direction U selon la probabilité uniforme sur $\mathbb{S}^2$ et de parcourir linéairement (ou pas !) l'unique géodésique définie par $\dot{\xi}$ et U.
- Abandonnant l'hypothèse de continuité, un processus de Poisson $\{\dot{\xi}_s\}_{s\geqslant 0}$ sur $\mathbb{H}$, de loi de saut radiale, définit un processus $\left\{(\dot{\xi}_s, \xi_s)\right\}_{s\geqslant 0}$ sur $\mathbb{H}\times\mathbb{R}^{1,3}$ dont la loi est invariante par l'action de $\mathcal{G}$.

Comme le remarque Dudley, [Dud66], p.259, un tel processus pour les vitesses semble adéquat, si l'on songe à une particule gardant une vitesse constante entre deux chocs aléatoires la faisant changer de direction.

On peut en fait donner une description exhaustive de l'ensemble des processus de Markov càdlàg sur $\mathbb{H}$, donnés par des noyaux de transition $\left\{P_t(\dot{\xi}, .)\right\}_{t\geqslant 0, \dot{\xi}\in\mathbb{H}}$ vérifiant les conditions

1. **Conservation de la masse** – $P_t(\dot{\xi}, \mathbb{H}) = 1$, quels que soient $t \geqslant 0$ et $\dot{\xi}\in\mathbb{H}$.
2. **Invariance par l'action de** $\mathcal{G}$ – Pour toute isométrie g de $\mathbb{H}$, tout point $\dot{\xi}\in\mathbb{H}$, tout borélien A de $\mathbb{H}$ et tout temps $t \geqslant 0$,
$$P_t(g(\dot{\xi}), g(A)) = P_t(\dot{\xi}, A).$$

Rappelons qu'on note $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$; $\varepsilon_0 \in \mathbb{H}$.

Définition **6.** *Une* ***mesure*** [11] *invariante par toute isométrie de* $\mathbb{H}$ *laissant* ε_0 *stable est dite* ***radiale****.*

On définit sans équivoque la convolution de deux mesure radiales μ et ν en posant pour tout borélien A de $\mathbb{H}$

$$\mu \star \nu(A) = \int \nu(A_{\dot{\xi}})\mu(d\dot{\xi}),$$

[9] Voir [Ive92], Chap.4.

[10] C'est là une définition de $SO_0(1,3)$, qui est la composante connexe de Id dans $SO(1,3)$.

[11] Il est sous-entendu ici comme dans la suite que l'on considère une mesure Borélienne, σ-finie.

où $A_{\dot\xi} = T_{\dot\xi}(A)$, et $T_{\dot\xi}$ est n'importe quelle isométrie de $\mathbb{H}$, choisie continûment en fonction de $\dot\xi$, qui envoie $\dot\xi$ sur ε_0. La propriété 2 permet de réécrire la propriété de Markov sous la forme

$$P_s \star P_t = P_{s+t}.$$

Aussi, chaque probabilité $P_t(\varepsilon_0, .)$ [12] est-elle infiniment divisible :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad P_t(\varepsilon_0, .) = P_{\frac{t}{n}}(\varepsilon_0, .) \star \cdots \star P_{\frac{t}{n}}(\varepsilon_0, .).$$

Karpelivich, Schur et Tutubalin ont donné dans [KTŠ59] une caractérisation de l'ensemble des probabilités radiales sur $\mathbb{H}$ infiniment divisibles, analogue au théorème de Lévy-Khinchin. Comme son analogue réel, cette caractérisation se formule en termes de transformée de Fourier. Le rôle des fonctions $e^{i\lambda\cdot}$, vecteurs propres du laplacien associé aux valeurs propres $-\lambda^2$, est joué par les fonctions sphériques

$$F_\lambda(\dot\xi) = \frac{\sin(\lambda\rho)}{\lambda \mathrm{sh}(\rho)},\ F_\lambda(\varepsilon_0) = 1,\ F_0(\dot\xi) = \frac{\rho}{\mathrm{sh}\rho}, \tag{1.0.2}$$

où ρ est la distance hyperbolique de $\dot\xi$ à ε_0 et λ un nombre complexe tel que $|\Im m(\lambda)| \leqslant 1$. La fonction F_λ est la seule fonction radiale vecteur propre de $\triangle^{\mathbb{H}}$, associé à la valeur propre $-(1+\lambda^2)$. La transformée de Fourier d'une probabilité radiale μ est définie pour $|\Im m(\lambda)| \leqslant 1$ par la formule

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \int F_\lambda(\dot\xi)\mu(d\dot\xi). \tag{1.0.3}$$

THÉORÈME **7 (Karpelevich, Schur, Tutubalin, [KTŠ59]).** *Une probabilité radiale est infiniment divisible si, et seulement si,*

$$\log \widehat{\mu}(\lambda) = (1+\lambda^2)\alpha - \int \big(1 - F_\lambda(\dot\xi)\big)\mathbb{Q}(d\dot\xi),$$

où $\alpha \geqslant 0$ et $\mathbb{Q}$ est une mesure positive, radiale, telle que

$$\int \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\mathbb{Q}(d\dot\xi) < \infty.$$

Notons $\{\dot\xi_s\}_{s\geqslant 0}$ le processus de Markov càdlàg dont $\{P_s\}_{s\geqslant 0}$ est la famille des noyaux de transition. La caractérisation de Karpelevich, Schur et Tutubalin des noyaux de transition P_s admet un pendant dynamique dans lequel $\{\dot\xi_s\}_{s\geqslant 0}$ est décrit comme la solution d'une équation différentielle stochastique conduite par un mouvement brownien et un processus de Poisson. Cette description dynamique de $\{\dot\xi_s\}_{s\geqslant 0}$ permet de voir le processus comme la "composée" d'un mouvement brownien sur $\mathbb{H}$ et d'un processus de saut radial sur $\mathbb{H}$; elle est détaillée dans la première partie de l'appendice **Dudley's results**, p.**??**.

3 – Comportement asymptotique – Si le comportement asymptotique de $\{\xi_s\}_{s\geqslant 0}$ est difficile à appréhender avec les seules informations sur $\{\dot\xi_s\}_{s\geqslant 0}$ données par le théorème de Karpelevich, Schur et Tutubalin, on peut tout de même obtenir une bonne description du comportement asymptotique de $\{\dot\xi_s\}_{s\geqslant 0}$ à l'aide de la seule propriété 2 d'invariance.

THÉORÈME **8 (Dudley, [Dud66], Theorem** 9.2, **p.**261, **[Dud73], Theorem** 3, **p.**3552**).**
- *Le processus $\{\dot\xi_s\}_{s\geqslant 0}$ est transient.*
- *Notons (ρ_s, σ_s) les coordonnées polaires de $\dot\xi_s$. La direction σ_s de $\dot\xi_s$ converge lorsque s tend vers l'infini.*

[12] Qui détermine $P_t(\dot\xi, .)$, quel que soit $\dot\xi$ grâce à la propriété 2 et à la transitivité de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{H}$.

On donne une preuve de ces théorèmes dans l'appendice **Dudley's results**, p.??. Il est difficile de pousser plus loin l'investigation sur le comportement asympotique du processus $\{(\dot{\xi}_s, \xi_s)\}_{s\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$, sous les seules conditions 1 et 2, et Dudley laisse les choses en l'état en 1974([13]).

On notera dorénavant $u_s = (\dot{\xi}_s, \xi_s) \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$.

On regarde ce processus comme une variable aléatoire définie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$, à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{\geqslant 0}, \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H})$. Cet espace mesurable porte une famille de probabilités $\{\mathbb{P}_{u_0}\}_{u_0 \in \mathbb{R}^{1,d}\times\mathbb{H}}$, donnant les lois de $\{u_s\}_{s\geqslant 0}$ lorsque les trajectoires sont issues des points $u_0 \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$. On peut définir des applications mesurables $\theta_t : \Omega \to \Omega$, $t > 0$, telles que

$$u_s\big(\theta_t(\omega)\big) = u_{s+t}(\omega),$$

quels que soient $s \geqslant 0, t > 0, \omega \in \Omega$. Ces opérateurs θ_t sont appelés des ***shifts***.

D'un point de vue formel, c'est dans la tribu

$$\tau\big(\{u_s\}\big) = \bigcap_{t>0} \sigma(u_s; s \geqslant t)$$

que se trouvent les informations sur le comportement asymptotique de la diffusion $\{u_s\}_{s\geqslant 0}$. Cette tribu s'appelle la ***tribu asymptotique du processus*** $\{u_s\}_{s\geqslant 0}$.

La tribu asymptotique contient une sous-tribu intéressante : ***la tribu invariante***. Elle est formée de l'ensemble des évènements de $\tau\big(\{u_s\}\big)$ invariants par les shifts θ_t :

$$Inv\big(\{u_s\}\big) = \big\{Z \in \tau\big(\{u_s\}\big)\,;\ \forall\, t > 0,\ \theta_t^{-1} Z = Z\big\}.$$

PROBLÈME. *Peut-on trouver un variable aléatoire Y, à valeurs dans un certain espace (un ensemble discret, une variété, une espace de Banach...) telle que, sous chaque probabilité $\mathbb{P}_{u_0}$*

- *les tribus $\tau\big(\{u_s\}\big)$ (ou $Inv\big(\{u_s\}\big)$) et $\sigma(Y)$ coïncident à des ensembles $\mathbb{P}_{u_0}$-mesure nulle près,*
- *la loi de Y est connue ?*

Ce travail de thèse apporte une réponse à ces deux problèmes lorsque le processus $\{\dot{\xi}_s\}_{s\geqslant 0}$ sur $\mathbb{H}$ est un mouvement brownien. Le théorème de Karpelevitch, Tutubalin et Schur donne l'ordre de généralité de ce choix : on n'examine que les processus continus répondant aux exigences de conservation de la masse et d'invariance par l'action de $\mathcal{G}$. On gagne en contre-partie tous les outils du calcul stochastique.

Le premier bénéfice d'un tel choix est la redémonstration quasi-immédiate du théorème **8** de Dudley sur le comportement asymptotique de $\{\dot{\xi}_s\}_{s\geqslant 0}$. On montre en effet que ses coordonnées polaires $(\rho_s, \theta_s)_{s\geqslant 0}$ vérifient les équations

$$\rho_s = \rho_0 + w_s^\rho + \int_0^s \coth(\rho_r)\, dr,$$
$$\sigma_s = \Sigma\left(\int_0^s \frac{dr}{\mathrm{sh}\rho_r}\right),$$

où w^ρ est un mouvement brownien réel et Σ un mouvement brownien sur la sphère $\mathbb{S}^2$, indépendant de w^ρ. On lit sur ces équations que $\rho_s \geqslant \rho_0 + w_s^\rho + s$, tend vers l'infini plus vite que $\frac{s}{2}$, et que donc le changement de temps $\int_0^s \frac{dr}{\mathrm{sh}\rho_r}$ converge lorsque $s \to +\infty$.

[13]A la recherche de conditions plus générales encore, Dudley abandonne dans l'article [Dud73] l'hypothèse d'invariance des noyaux de transition par les isométries de $\mathbb{H}$ et donne des conditions plus faibles sous lesquelles la direction σ_s du mouvement $\dot{\xi}_s$ sur $\mathbb{H}$ converge (que $\{\dot{\xi}_s\}_{s\geqslant}$ soit on non transient).

Second bénéfice : on peut reformuler le problème précédent en termes analytiques, faisant intervenir le générateur différentiel de $\{(\dot{\xi}_s, \xi_s)\}_{s\geqslant 0}$.

$$Lf(\dot{\xi}, \xi) = \frac{\triangle^{\mathbb{H}}_{\dot{\xi}} f}{2} + \partial_\xi f(\dot{\xi}).$$

$\partial_\xi f(\dot{\xi})$ y désigne la différentielle de f par rapport à ξ, dans la direction $\dot{\xi}$.

PROBLÈME BIS. *Déterminer l'ensemble des fonctions bornées h, définies sur $\mathbb{R}^{>0} \times (\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H})$ (resp. $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$), telles que $(\partial_s + L)h = 0$ (resp. $Lh = 0$).*[14]

Cette reformulation est effectuée dans la section **??**. On y montre qu'une fonction bornée vérifiant l'équation $(\partial_s + L)h = 0$ est indépendante de s ; elle vérifie donc l'équation $Lh = 0$. Aussi n'y a-t-il qu'un seul problème analytique. D'un point de vue probabiliste, cela signifie que toute l'information sur le comportement asymptotique de la diffusion $\{u_s\}_{s\geqslant 0}$ est contenue dans la tribu invariante $Inv(\{u_s\})$.

DÉFINITION **9.** *Une fonction $h : \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $Lf = 0$, est dite L-**harmonique**.*

L'objectif de la partie 2 est de **décrire l'ensemble des fonctions L-harmoniques bornées**. Cette description est donnée au théorème **11**.

La stratégie – Rappelons une définition.

DÉFINITION **10.** *Une **fonction L-harmonique positive** h est dite **minimale** si les seules fonctions h' L-harmoniques, positives, telles que $0 \leqslant h' \leqslant h$, sont les fonctions λh, avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.*

On va trouver un ensemble $\{h^\alpha\}_{\alpha\in A}$ de fonctions L-harmoniques minimales, indexé par un certain ensemble A, et une probabilité $\nu_{\mathbf{1}}$ sur A, tels que la fonction $\mathbf{1}$, identiquement égale à 1, est le barycentre des fonctions h^α :

$$\mathbf{1} = \int h^\alpha \nu_{\mathbf{1}}(d\alpha). \tag{1.0.4}$$

Utilisant des résultats de Choquet sur la représentation intégrale dans les convexes compacts, on déduit de l'identité (1.0.4) que toute fonction L-harmonique bornée est de la forme

$$h(.) = \int h^\alpha(.) H(\alpha) \nu_{\mathbf{1}}(d\alpha),$$

où H est une fonction sur A, borélienne, bornée.

Quelles sont ces fonctions h^α ? – La convergence de $\{\sigma_s\}_{s\geqslant 0}$ vers un point limite $\sigma_\infty \in \mathbb{S}^2$ nous fournit une identité du type (1.0.4). La variable σ_∞ admet sous chaque probabiblité $\mathbb{P}_{u_0}$, $u_0 \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,d}$, une densité $\sigma \in \mathbb{S}^2 \to h^\sigma(u_0)$ par rapport à la probabilité uniforme $d\sigma$ sur $\mathbb{S}^2$, strictement positive. Pour chaque $\sigma \in \mathbb{S}^2$, la fonction $u \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H} \mapsto h^\sigma(u)$ est L-harmonique, et

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}, \quad 1 = \int h^\sigma(u)\, d\sigma.$$

Mais les fonctions h^σ sont-elles extrêmales ?

[14]Remarquer qu'on ne suppose pas h de classe $\mathcal{C}^2$. Une fonction h vérifiant la relation $Lh = 0$, au sens des distributions, est automatiquement de classe $\mathcal{C}^2$. On règle ces questions de régularité dans la section **??**.

Soit φ une rotation de $\mathbb{R}^3$. Pour $\dot{\xi} \in \mathbb{H}$, de coordonnées polaires (ρ, σ), on note $\varphi(\dot{\xi})$ le point de $\mathbb{H}$ de coordonnées polaires $\big(\rho, \varphi(\sigma)\big)$. Cette transformation est une isométrie de $\mathbb{H}$. Utilisant la relation

$$h^{\varphi(\sigma)}\big((\dot{\xi}, \xi)\big) = h^{\sigma}\big((\varphi^{-1}(\dot{\xi}), \varphi^{-1}(\xi))\big),$$

valable quels que soient $\varphi \in O(\mathbb{R}^3)$, $\sigma \in \mathbb{S}^2$, $(\dot{\xi}, \xi) \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$, et l'invariance de L par l'action de φ^{-1} sur $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,3}$, on voit que l'une des fonctions h^{σ} est minimale si, et seulement si, toutes le sont. On peut donc se contenter de voir si la fonction $h^{\varepsilon_1}(.)$ est minimale ou non[15]. On peut reformuler la définition d'une fonctions harmonique minimale sous la forme

($\bigstar$) : $h^{\varepsilon_1}(.)$ *est minimale si, et seulement si, les seules fonctions h, bornées, vérifiant l'égalité $L(h^{\varepsilon_1}h) = 0$, sont les constantes.*

On peut construire une diffusion $\big\{(\dot{\xi}_s, \xi_s)\big\}_{s \geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$ dont le générateur infinitésimal est

$$f \mapsto \frac{L(h^{\varepsilon_1} f)}{h^{\varepsilon_1}}.$$

Cette diffusion a même loi que la diffusion originelle, conditionnée par l'évènement (de probabilité nulle) $\{\sigma_\infty = \varepsilon_1\}$. On parle de diffusion conditionnée ou de h^{ε_1}***-processus***[16]. On notera $\mathbb{P}^{\varepsilon_1}$ sa loi.

Dans ce cadre, le lien mentionné plus haut entre fonctions harmoniques bornées et tribu invariante donne de la phrase ($\bigstar$) une version probabiliste.

($\bigstar'$) : $h^{\varepsilon_1}(.)$ *est extrêmale si, et seulement si, la diffusion conditionnée a une tribu invariante triviale.*

Un argument simple de martingale montre que la tribu invariante est, sous chaque probabilité $\mathbb{P}^{\varepsilon_1}_{u_0}$, $u_0 \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$, engendrée par les variables aléatoires de la forme

$$\lim_{s \to +\infty} f(u_s)$$

où f est une fonction borélienne, bornée, allant de $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}$([17]). En somme, on montre que la fonction h^{ε_1} n'est pas extrêmale si l'on trouve une fonction qui converge (presque sûrement) le long des trajectoires de la diffusion conditionnée vers une variable aléatoire dont la loi n'est pas triviale.

On choisit un autre paramétrage de $\mathbb{H}$ que les coordonnées polaires pour examiner le comportement de la diffusion conditionnée. L'application

$$\psi : \big(y, (x_1, ..., x_2)\big) \in \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{|x|^2 + y^2 + 1}{2y}, \frac{|x|^2 + y^2 - 1}{2y}, \frac{x_1}{y}, \cdots, \frac{x_2}{y^2}\right) \in \mathbb{H}$$

est une isométrie entre l'espace $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^2$, muni de la métrique riemannienne

$$U, V \in \mathbb{R}^3,\ (y, x) \in \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^2, \quad (U, V)_{(y,x)} = \frac{\langle U, V \rangle_{\mathrm{Eucl}}}{y^2},$$

et $(\mathbb{H}, q)$.

On utilise le demi-espace $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^2$ comme paramétrage de $\mathbb{H}$. Dans ces coordonnées, la fonction $h^{\varepsilon_1}\big((y, x), \xi\big)$ est un multiple de y^2 et la diffusion conditionnée est régie par un système d'équations différentielles stochastiques.

$$\begin{aligned}
dy_s &= y_s dw^y_s + \frac{3}{2} y_s ds, \\
dx_s &= y_s dw^x_s, \\
d\xi_s &= \psi\big((y_s, x_s)\big),
\end{aligned}$$

[15] Rappelons qu'on note $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

[16] On rappelle dans l'appendice **h-transform, ??**, p.**??**, le lien entre conditionnement et h-processus.

[17] Cette limite existe bien $\mathbb{P}^{\varepsilon_1}_{u_0}$-presque sûrement, quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$.

où w^y et w^x sont deux mouvements browniens réels indépendants. On montre que la fonction

$$R^{\varepsilon_1}\big((\dot{\xi},\xi)\big) = q(\xi,\varepsilon_0+\varepsilon_1)$$

converge presque sûrement le long des trajectoires de la diffusion conditionnée vers une variable aléatoire $R^{\varepsilon_1}_\infty$ ayant une loi non triviale. La fonction L-harmonique h^{ε_1} n'est donc pas extrêmale.

On retrouve à cette occasion un résultat de Dufresne identifiant la loi de l'intégrale $\int_0^\infty e^{w_u-cu}\,du$, où w est un mouvement brownien réel et c une constante >0.

La variable aléatoire $R^{\varepsilon_1}_\infty$ admet sous $\mathbb{P}^{\varepsilon_1}_u$ une densité $\ell\in\mathbb{R}\mapsto h^{\varepsilon_1}_\ell(u)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Les fonctions $u\in\mathbb{R}^{1,d}\times\mathbb{H}\mapsto h^{\varepsilon_1}_\ell(u)$, $\ell\in\mathbb{R}$, sont toutes $L^{h^{\varepsilon_1}}$-harmoniques. On a donc une famille $\{h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell\}_{\ell\in\mathbb{R}}$ de fonctions L-harmoniques. L'une de ces fonctions $h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell$ est-elle minimale ?

A la différence de h^{ε_1}, qui est >0, chacune de ces fonctions $h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell$ s'annule sur le fermé $\big\{(\dot{\xi},\xi)\in\mathbb{R}^{1,d}\times\mathbb{H}\,;\ \ell\leqslant q(\xi,\varepsilon_0+\varepsilon_1)\big\}$. Etant donné $\ell\in\mathbb{R}$, on définit donc l'opérateur $L^{h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell}f=\frac{L(h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell f)}{h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell}$ sur l'ouvert complémentaire $\big\{(\dot{\xi},\xi)\in\mathbb{R}^{1,d}\times\mathbb{H}\,;\ \ell>q(\xi,\varepsilon_0+\varepsilon_1)\big\}$, ainsi que le $h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell$-processus correspondant.

On montre que les fonctions $L^{h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell}$-harmoniques, bornées, sont constantes (*i.e.* $h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell$ est minimale) en utilisant un couplage des trajectoires du $h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell$-processus.

Couplage – L'idée ici mise en oeuvre est simple. Oublions un instant le $h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell$-processus et considérons une diffusion[18] sur $\mathbb{R}^n$, de générateur noté L, définie sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{F})$. La formule d'Itô montre que pour une fonction L-harmonique bornée h, le processus $\{h(u_s)\}_{s\geqslant 0}$ est une martingale bornée. On a donc

$$h(u_0)=\mathbb{E}_{u_0}\big[h(u_T)\big],$$

pour tout temps d'arrêt T. Aussi, étant donnés deux points u_0, u_1, supposons avoir trouvé
- une probabilité $\mathbb{P}_{u_0,u_1}$ sur $(\Omega\times\Omega,\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})$, deux processus $\{u_s\}_{s\geqslant 0}$ et $\{u'_s\}_{s\geqslant 0}$, de lois respectives $\mathbb{P}_{u_0}$ et $\mathbb{P}_{u_1}$, sous $\mathbb{P}_{u_0,u_1}$,
- deux temps aléatoires T et T' tels que T (resp. T') est un temps d'arrêt par rapport à la filtration engendrée par $\{u_s\}_{s\geqslant 0}$ (resp. $\{u'_s\}_{s\geqslant 0}$), et $u_T=u'_{T'}$, $\mathbb{P}_{u_0,u_1}$-presque sûrement.

Alors, on aura

$$h(u_0)=\mathbb{E}_{u_0}[h(u_T)]=\mathbb{E}_{u_0,u_1}[h(u_T)]=\mathbb{E}_{u_0,u_1}[h(u'_{T'})]=\mathbb{E}_{u_1}[h(u'_{T'})]=h(u_1).$$

La difficulté dans ce genre d'argument réside dans la construction même du couplage (la probabilité $\mathbb{P}_{u_0,u_1}$), qui doit nous assurer que les trajectoires $\{u_s\}_{s\geqslant 0}$ et $\{u'_s\}_{s\geqslant 0}$ se rencontrent, ce qui n'a rien d'immédiat dès lors que l'on quitte $\mathbb{R}$.

La situation est tout de même assez bonne pour que l'on puisse réaliser le couplage de mouvements browniens sur une variété à courbure de Ricci positive[19] ! Sous l'impulsion de W. Kendall et Cranston (entre autres) l'étude de tels couplages pour des diffusions elliptiques a donné de nombreux résultats intéressants[20].

Dans notre cas, l'utilisation de cette méthode est a priori embarrassée par la non ellipticité des opérateurs L, $L^{h^{\varepsilon_1}}$ et $L^{h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell}$ et les complications que le cadre non elliptique[21] apportent. Peu d'études ont été menées dans le cadre hypoelliptique[22]. Ben Arous, Cranston et W. Kendall examinent dans [BACK95] la diffusion plane $(w_s,\int_0^s w_r\,dr)$, où w est un mouvement brownien réel, ainsi que la diffusion (W_s,A_s) sur $\mathbb{R}^3$, où W est un mouvement brownien plan et A_s son aire de Lévy stochastique. W. Kendall prolonge avec C. Price l'étude du premier exemple, dans [KP04], en considérant aussi des intégrales itérées du mouvement brownien.

[18] De Feller-Dynkin.

[19] Voir [Ken86].

[20] Consulter par exemple [Cra91], où Cranston utilise un couplage pour obtenir des estimations du gradient de fonctions harmoniques sur certaines variétés riemanniennes.

[21] C'est-à-dire non riemannien.

[22] Qui est delui des opérateurs L, $L^{h^{\varepsilon_1}}$ et $L^{h^{\varepsilon_1}h^{\varepsilon_1}_\ell}$. On définit ce terme dans la section **??**.

Cependant, à ce jour, aucun résultat général sur le couplage de diffusions hypoelliptiques ne semble avoir été obtenu.

Dans l'usage qu'on en fait ici, ce n'est pas tant le couplage en soi qui nous intéresse que son application à l'étude des fonctions harmoniques. Cela nous donne quelque latitude. Avant de coupler des trajectoires de la $h^{\varepsilon_1}h_\ell^{\varepsilon_1}$-diffusion, on montre qu'une fonction $L^{h^{\varepsilon_1}h_\ell^{\varepsilon_1}}$-harmonique *bornée* ne dépend a priori que de deux coordonnées y et $\xi'^0 (= q(\xi, \varepsilon_0 + \varepsilon_1))$; on n'aura donc à coupler que ces deux coordonnées pour la $L^{h^{\varepsilon_1}h_\ell^{\varepsilon_1}}$-diffusion.

Cette propriété des fonctions $L^{h^{\varepsilon_1}h_\ell^{\varepsilon_1}}$-harmoniques provient de le propriété analogue pour les fonctions $L^{h^{\varepsilon_1}}$-harmoniques bornées. On obtient cette dernière en utilisant un couplage, ou plutôt un ***quasi-couplage***.

Profitant de ce que les fonctions $L^{h^{\varepsilon_1}}$-harmoniques bornées sont naturellement uniformément continues (section **??**), on montre que l'on peut trouver pour chaque $\varepsilon > 0$ non pas un couplage exact ($u_T = u'_{T'}$), mais un couplage assez bon pour que $|h(u_T) - h(u'_{T'})| \leqslant \varepsilon$, ce qui nous donne

$$\big|h(u_0) - h(u_1)\big| \leqslant \mathbb{E}_{u_0,u_1}\big[\big|h(u_T) - h(u'_{T'})\big|\big] \leqslant \varepsilon,$$

et donc $h(u_0) = h(u_1)$, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. On peut définir un tel couplage dès lors que u_0 et u_1 ont les mêmes deux coordonnées y et ξ'^0 (section **??**).

On remarquera au **??** que l'on se ramène à coupler deux trajectoires d'une diffusion plane de la forme $\big\{(z_s, I_0 + \int_0^s z_r\, dr)\big\}_{s\geqslant 0}$, où z est une diffusion sur $\mathbb{R}$, récurrente positive. Cette situation ressemble donc à celle étudiée par Ben Arous & al. Leur méthode, cependant, ne fonctionne pas dans ce cas. On résume notre approche dans l'appendice **??**, **Coupling of a hypoelliptic diffusion on** $\mathbb{R}^2$, p.**??**.

L'approche esquissée ci-dessus permet de donner une description de l'ensemble des fonctions harmoniques bornées, et par là, de la tribu invariante de la diffusion $\big\{(\dot{\xi}_s, \xi_s)\big\}_{s\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$.

THÉORÈME **11.** *1. Toute fonction L-harmonique, bornée, est de la forme*

$$\int_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}} h^\sigma(.) h_\ell^\sigma(.) H(\sigma, \ell)\, d\sigma d\ell,$$

où H est une fonction borélienne, bornée, sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

2. Notons

$$\sigma_\infty = \lim_{s\to+\infty} \sigma_s$$

et

$$R_\infty^{\sigma_\infty} \equiv \lim_{s\to+\infty} q(\xi_s, \varepsilon_0 + \sigma_\infty).$$

Etant donné $u_0 \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$, les limites précédentes existent $\mathbb{P}_{u_0}$-presque sûrement et la tribu invariante $Inv\big(\{u_s\}\big)$ coïncide avec la tribu $\sigma(\sigma_\infty, R_\infty^{\sigma_\infty})$, à des ensembles de $\mathbb{P}_{u_0}$-mesure nulle près.

DEFINITION **12.** *Pour des raisons historiques, on appelle* ***frontière de Poisson de l'opérateur** L**, sur le domaine*** $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^3$*, l'ensemble des fonctions L-harmoniques bornées.*

4 – Une description géométrique de la frontière de Poisson de L – Il est naturel de se demander si l'on peut donner de ce théorème une version géométrique. L'espace $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$ est-il naturellement muni d'un bord à l'infini $\partial(\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H})$ tel que

- les trajectoires $\{u_s\}_{s\geqslant 0}$ convergent $\mathbb{P}_{u_0}$-presque sûrement vers un point $u_\infty \in \partial(\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H})$,
- les tribus $Inv\big(\{u_s\}\big)$ et $\sigma(u_\infty)$ coïncident à des ensembles de $\mathbb{P}_{u_0}$-mesure nulle près,

quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$?

Une telle situation arrive par exemple lorsqu'on étudie le mouvement brownien sur une variété de Cartan-Hadamard à courbure sectionnelle bornée et inférieure à une constante $-\varepsilon < 0$. Une telle variété $\mathbb{V}$, de dimension n, admet une compactification naturelle.

Des coordonnées polaires (ρ, σ), $\rho > 0, \sigma \in \mathbb{S}^2$, sont bien définies sur $\mathbb{V}$ dès lors que l'on choisit un point de base sur $\mathbb{V}$([23]). On identifie deux courbes $\{\gamma_t\}_{t\geqslant 0}$ et $\{\gamma'_t\}_{t\geqslant 0}$, quittant tout compact, et données en coordonnées polaires $\big\{(\rho_t, \sigma_t)\big\}_{t\geqslant 0}$, $\big\{(\rho'_t, \sigma'_t)\big\}_{t\geqslant 0}$, si les directions σ_t et σ'_t de γ_t et γ'_t convergent toutes les deux vers un même point σ_∞ de $\mathbb{S}^{n-1}$. Cette relation d'équivalence permet d'ajouter à $\mathbb{V}$ un bord à l'infini, $\partial\mathbb{V}$, homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$, où un point de $\partial\mathbb{V}$ correpond à $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$ s'il est dans la même classe que la géodésique $\{(t,\sigma)\}_{t\geqslant 0}$, issue du point de base, avec pour vitesse initiale σ.

Toute géodésique s'avère converger vers un point du bord. Dans ce contexte, le mouvement brownien $\{w_s\}_{s\geqslant 0}$ sur $\mathbb{V}$ converge vers un point σ_∞ de $\partial\mathbb{V}$([24]). On doit à Anderson [And83] la première démonstration du fait que $\sigma(\sigma_\infty)$ et $Inv\big(\{w_s\}\big)$ coïncident à des ensembles de $\mathbb{P}_{w_0}$-mesure nulle près, quel que soit la condition initiale w_0 (il démontre en fait un résultat plus fort)[25]. En ce sens, le mouvement brownien sur $\mathbb{V}$ finit par se comporter comme une géodésique[26].

La situation dans notre cadre lorentzien diffère radicalement. La notion de distance entre deux points n'est même pas bien définie : que signifierait l'égalité

$$d(0, \varepsilon_0 + \varepsilon_1) = \inf\left\{\int_0^1 \sqrt{|q(\dot\gamma_t, \dot\gamma_t)|}\, ds\ ;\ \gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\right\} = 0,$$

alors que les deux points 0 et $\varepsilon_0 + \varepsilon_1$ dont distincts ?

Il nous faut tenir compte de la structure lorentzienne. Introduisons pour cela un peu de vocabulaire.

DÉFINITION **13.** – *Une* ***courbe*** *de classe $\mathcal{C}^1$, $\gamma : \mathbb{R}^{\geqslant 0} \to \mathbb{R}^{1,3}$, $s \mapsto \gamma_s$, est dite* ***temporelle*** *si $q(\dot\gamma_s) > 0$, quel que soit $s \geqslant 0$.*
- *On dit que c'est une* ***courbe de lumière*** *si $q(\dot\gamma_s) = 0$, quel que soit $s \geqslant 0$.*
- *Etant donné un point $\xi \in \mathbb{R}^{1,3}$, on note $\mathcal{C}^{>0}(\xi) = \big\{\zeta \in \mathbb{R}^{1,3} ; q(\zeta - \xi) > 0\big\}$ le* ***futur (chronologique) de*** *ξ ; c'est l'ensemble des points de l'espace/temps influençables par ξ à l'aide d'un signal allant strictement moins vite que la lumière.*
- *On note aussi $\mathcal{C}^{\geqslant 0}(\xi) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{1,3} ; q(\zeta - \xi) \geqslant 0\}$ le* ***futur causal de*** *ξ ; c'est l'ensemble des points de l'espace/temps influençables par ξ.*
- *De la même manière, on définit le* ***passé chronologique de*** *ξ, $\mathcal{C}^{<0}(\xi)$, comme $\big\{\zeta \in \mathbb{R}^{1,3} ; q(\zeta - \xi) < 0\big\}$, et le* ***passé causal de*** *ξ, $\mathcal{C}^{\leqslant 0}(\xi)$, comme $\big\{\zeta \in \mathbb{R}^{1,3} ; q(\zeta - \xi) \leqslant 0\big\}$.*[27]

Dans la suite, toutes les courbes considérées seront de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarquons que deux points ξ et ξ' de $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$ sont égaux si, et seulement si, ils ont même passé :

$$\{\xi' = \xi\} \Longleftrightarrow \big\{\mathcal{C}^{<0}(\xi') = \mathcal{C}^{<0}(\xi)\big\} \Longleftrightarrow \big\{\mathcal{C}^{\leqslant 0}(\xi') = \mathcal{C}^{\leqslant 0}(\xi)\big\} (^{28}).$$

Remarquons aussi que si $\{\gamma_t\}_{t\geqslant 0}$ est une courbe causale, les ensembles $\mathcal{C}^{\leqslant 0}(\gamma_t)$ croissent avec t :

$$\text{si } 0 \leqslant s \leqslant t,\ \mathcal{C}^{\leqslant 0}(\gamma_s) \subset \mathcal{C}^{\leqslant 0}(\gamma_t).$$

Au vu de cela, il peut sembler honnête de définir la relation d'équivalence suivante.

DÉFINITION **14.** *Deux* ***courbes causales*** *$\{\gamma_t\}_{t\geqslant 0}$ et $\{\gamma'_t\}_{t\geqslant 0}$, quittant tout compact, sont dites* ***équivalentes*** *si*

$$\bigcup_{t>0} \mathcal{C}^{\leqslant 0}(\gamma_t) = \bigcup_{t>0} \mathcal{C}^{\leqslant 0}(\gamma'_t).$$

[23] Il s'agit des coordonnées exponentielles.
[24] Voir par exemple Prat [Pra75], Kifer [Kif86], ou Ancona [Anc90].
[25] Ancona donne dans [Anc90] des généralisations de ce résultat.
[26] Le théorème 7.3 de [Anc90] donne une version quantifiée de ce fait.
[27] On adopte la notation non traditionnelle $\mathcal{C}^{>0}(\xi)$, etc. pour rappeler qu'il s'agit là de véritables cônes affines de $\mathbb{R}^{1,3}$: $\forall\,\lambda > 0$, $\zeta \in \mathcal{C}^{>0}(\xi)$, $\xi + \lambda(\zeta - \xi) \in \mathcal{C}^{>0}(\xi)$.
[28] On a des équivalences analogues avec les ensembles futurs.

En somme, on identifie deux points infiniment loins s'ils ont même passé. On appelle ***bord causal*** la classe d'équivalence de chemins obtenue. On le note $\partial_c(\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,d})$.

On peut munir la réunion disjointe de $\mathbb{H}\times\mathbb{R}^{1,d}$ et de $\partial_c(\mathbb{H}\times\mathbb{R}^{1,d})$ d'une topologie qui coïncide sur $\mathbb{H}\times\mathbb{R}^{1,d}$ avec la topologie originelle et qui fasse de $\partial_c(\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,d})$ le bord de $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,d}$.

On peut définir un tel bord sur une variété lorentzienne. Il est cependant loin d'être évident que l'on pourra donner une description de cet ensemble de classes d'équivalence en termes géométriques simples[29]. Cette construction souffre de plus de défauts théoriques déjà notés dans l'article originel [GKP72] de Geroch, Kronheimer et Penrose sur le sujet. On peut cependant mener à bien cette approche en utilisant une idée proche.

Seule la structure causale spécifiée par les cônes $\mathcal{C}^{\leqslant 0}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$, importe dans la construction précédente. Supposons donnée une autre variété $\mathbb{V}$ où les notions de courbe temporelle, causale, de cône passé (chronologique, causal)... sont bien définies, en des termes analogues à ce qu'on a vu sur $\mathbb{R}^{1,3}$. Imaginons avoir une application $\varphi : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{V}$, respectant ces structures :

$$\{\zeta \in \mathcal{C}^{\leqslant 0}(\xi)\} \iff \{\varphi(\zeta) \in \mathcal{C}^{\leqslant 0}\big(\varphi(\xi)\big)\},$$

des équivalences analogues ayant lieu pour $\mathcal{C}^{<0}\big(\varphi(\xi)\big)$, $\mathcal{C}^{\geqslant 0}\big(\varphi(\xi)\big)$ et $\mathcal{C}^{>0}\big(\varphi(\xi)\big)$.

Si $\varphi(\mathbb{R}^{1,3})$ est relativement compact, et φ (et $\mathbb{V}$) bien choisie, on pourra identifier le bord causal de $\mathbb{R}^{1,3}$ (ou de $\varphi(\mathbb{R}^{1,3})$) à une partie du bord de $\varphi(\mathbb{R}^{1,3})$ dans $\mathbb{V}$.

C'est une telle construction qui est faite dans la section **??**, où le rôle de $\mathbb{V}$ est joué par l'univers d'Einstein. Le bord (causal) de $\mathbb{R}^{1,3}$ s'identifie à un cylindre $\mathbb{S}^2 \times [-\infty, +\infty]$ où l'on identifie $\mathbb{S}^2 \times \{-\infty\}$ et $\mathbb{S}^2 \times \{+\infty\}$ à un même point. On note $\mathbf{C}$ ce bord, et $\mathbf{p}$ le point $\mathbb{S}^2 \times \{\pm\infty\}$. On montre que $\mathbf{C}$ s'identifie naturellement à une certaine classe d'équivalence de géodésiques de lumière. Le théorème suivant donne une description géométrique de la frontière de Poisson de L sur $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,3}$.

THÉORÈME **15.** *Soit* $u_0 \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}$.

1. *Le processus* $\{\xi_s\}_{s\geqslant 0}$ *converge* $\mathbb{P}_{u_0}$*-presque sûrement vers un point* $\xi_\infty \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{p}$. *En ce sens,* $\{\xi_s\}_{s\geqslant 0}$ *finit par se comporter comme une géodésique de lumière.*
2. *Les tribus* $Inv\big(\{u_s\}\big)$ *et* $\sigma(\xi_\infty)$ *coïncident à des ensembles de* $\mathbb{P}_{u_0}$*-mesure nulle près.*

5 – Une description algébrique de la frontière de Poisson – On a indiqué après le théorème **7** de Karpelevich, Schur et Tutubalin, que l'on peut décrire la partie $\{\dot{\xi}_s\}_{s\geqslant 0}$ d'un processus relativiste $\big\{(\dot{\xi}_s, \xi_s)\big\}_{s\geqslant 0}$ général sur $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,d}$ comme la solution d'une équation différentielle stochastique conduite par un mouvement brownien et un processus de Poisson. Le véritable cadre de cette interprétation est le groupe $SO_0(1,3)$ dont la (demi-)pseudo-sphère unité est un espace homogène, et le théorème de Karpelevich, Schur et Tutubalin le reflet d'un théorème décrivant tous les processus de Lévy sur $SO_0(1,3)$ (voir l'appendice **Dudley's results**, **1**, p.**??**).

Appelons $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{1,3}$. Trois champs de vecteurs, H_1, H_2, H_3, sur $SO_0(1,3)$, invariants par translation à gauche, y jouent un rôle particulier. Ils sont donnés par leur valeur en l'identité ; respectivement

- E_1, échangeant ε_0 et ε_1, envoyant ε_2 et ε_3 sur 0,
- E_2 : échangeant ε_0 et ε_2, envoyant ε_1 et ε_3 sur 0,
- E_3 : échangeant ε_0 et ε_3, envoyant ε_1 et ε_2 sur 0.[30]

Dans l'identité (1.0.5) comme dans tout le manuscrit, la convention de sommation d'Einstein est adoptée. Aussi,

$$H_j \circ dw_s^j = \sum_{j=1..3} H_j \circ dw_s^j.$$

[29] On entend par là montrer que ce bord est homéomorphe à telle ou telle variété.

[30] Ces trois champs de vecteurs sont les boosts, déjà apparus au **1**.

Le mouvement brownien sur $\mathbb{H}$ apparaît comme la projection sur $\mathbb{H} \simeq SO_0(1,3)/SO_0(3)$ de la diffusion $\{g_s\}_{s\geqslant 0}$ sur $SO_0(1,3)$ solution de l'équation différentielle stochastique

$$dg_s = H_j \circ dw_s^j, \tag{1.0.5}$$

où les w^j sont des mouvements browniens indépendants[31]. Plus simplement, $\{g_s\varepsilon_0\}_{s\geqslant 0}$ est un mouvement brownien sur $\mathbb{H}$. Si l'on identifie $SO_0(1,3)$ et l'ensemble $\mathbb{O}^+\mathbb{H}$ des repères orthonormés directs de $\mathbb{H}$, les champs de vecteurs H_i sont les champs de vecteurs horizontaux canoniques sur $\mathbb{O}^+\mathbb{H}$, et la construction précédente du mouvement brownien sur $\mathbb{H}$ la construction de Eells et Elworthy.

Comment, en ces termes envisager la diffusion $\big\{(\dot\xi_s, \xi_s)\big\}_{s\geqslant 0}$ sur $\mathbb{H}\times\mathbb{R}^{1,d}$?

Fixons $s > 0$. Suivant McKean, considérons g_s comme la limite (presque sûre) du produit

$$\prod_{i=1..n-1} \exp\Big(\big(w^j_{\frac{(i+1)s}{n}} - w^j_{\frac{(i+1)s}{n}}\big)E_j\Big),$$

lorsque $n \to +\infty$ (voir [McK69], Chap.4.8).

Notons $\mathbf{e} = (g,\xi)$ un point de $SO_0(1,3)\times\mathbb{R}^3$, et posons $\mathbf{e}_s = (g_s,\xi_s)$, avec $g_s\varepsilon_0 = \dot\xi_s$. La description de McKean justifie moralement l'approximation $\overset{\bullet}{\simeq}$ ci-dessous.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{s+ds} = (g_{s+ds},\xi_{s+ds}) &\simeq \big(g_{s+ds}, \xi_s + \dot\xi_s ds\big)\\ &\overset{\bullet}{\simeq} \Big(g_s \exp\big((w^j_{s+ds} - w^j_s)E_j\big), \xi_s + \dot\xi_s ds\Big)\end{aligned}$$

Si l'on munit $SO_0(1,3)\times\mathbb{R}^{1,3}$ du produit semi-direct

$$(g,\xi)(g',\xi') = (gg', \xi + g\xi'),$$

l'identité précédente s'écrit

$$\mathbf{e}_{s+ds} = (g_s,\xi_s)\Big(\exp\big((w^j_{s+ds} - w^j_s)E_j\big), \varepsilon_0 ds\Big).$$

Notons $\widetilde{E}_j = (E_j, 0)$, $j = 1..d$, l'extension naturelle de E_j à $SO_0(1,3)\times\mathbb{R}^{1,3}$, et $\widetilde{A}_0 = (0,\varepsilon_0)$. Notant $\mathbf{exp}$ l'exponentielle sur le produit semi-direct $SO_0(1,3)\times\mathbb{R}^{1,3}$, on a, avec des notations claires,

$$\mathbf{exp}\big((dg,\dot\xi)\big) = (\mathrm{Id},0) + (dg,\dot\xi) + \frac{1}{2}\big(dg^2, \dot\xi + dg\dot\xi\big) + \cdots.$$

Aussi,

$$\begin{aligned}\mathbf{exp}\big((w^j_{s+ds} - w^j_s)\widetilde{E}_j + \widetilde{A}_0 ds\big) &= (\mathrm{Id},0) + \big((w^j_{s+ds} - w^j_s)\widetilde{E}_j, \varepsilon_0 ds\big) + \frac{1}{2}\Big(\big((w^j_{s+ds} - w^j_s)\widetilde{E}_j\big)^2, O\big((w^j_{s+ds} - w^j_s)ds\big)\Big) + \cdots\\ &\simeq \Big(\exp\big((w^j_{s+ds} - w^j_s)\widetilde{E}_j\big), \varepsilon_0 ds + o(ds)\Big).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{e}_{s+ds} \simeq \mathbf{e}_s\,\mathbf{exp}\big((w^j_{s+ds} - w^j_s)\widetilde{E}_j + \widetilde{A}_0 ds\big)$$

[31] L'opérateur $\frac{1}{2}\big(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2\big)$ est hypoelliptique. On peut aussi obtenir le mouvement brownien sur $\mathbb{H}$ en projetant sur $\mathbb{H}$ la diffusion ellitpique solution de l'équation $dg_s = V_j \circ dw_s^j + V_{jk} dw_s^{jk}$, où les champs de vecteurs V_{jk} sont les champs sur $SO_0(1,3)$ associés aux rotations infinitésimales $E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3}$ de $\mathbb{R}^3$; ces matrices sont définies p.4.

Le processus $\{\mathbf{e}_s\}_{s\geqslant 0}$ sur $SO_0(1,3)\times\mathbb{R}^{1,3}$ doit donc, au vu du théorème de McKean, être solution de l'équation différentielle stochastique

$$d\mathbf{e}_s = V_j \circ dw_s^j + V_0 ds, \tag{1.0.6}$$

où $V_j(\mathbf{e}) = \mathbf{e}\widetilde{E}_j$ et $V_0(\mathbf{e}) = \mathbf{e}\widetilde{A}_0$. On vérife directement que cette équation est la même que le système

$$dg_s = V_i \circ dw_s^j, \quad d\xi_s = g_s^0 ds.$$

On notera $\mathbb{P}_{\mathbf{e}_0}$ la loi de la diffusion solution de l'équation (1.0.6), correspondant à la condition initiale $\mathbf{e}_0 \in \mathcal{G}$.

On peut donc voir la diffusion $\big\{(\dot{\xi}_s,\xi_s)\big\}_{s\geqslant 0}$ sur $\mathbb{H}\times\mathbb{R}^{1,d}$ comme la projection sur $\mathbb{H}\times\mathbb{R}^{1,d}$ d'une diffusion sur le produit semi-direct $SO_0(1,3)\times\mathbb{R}^{1,3}$, invariante à gauche. Ce groupe n'est autre que le groupe de Poincaré $\mathcal{G}$ des isométries affines de la forme quadratique q([32]).

C'est un fait classique (et le théorème **??** le montrera) qu'étant donné $\mathbf{e}_0 = (g_0,\xi_0) \in \mathcal{G}$, les tribus $Inv\big(\{\dot{\xi}_s\}\big)$ et $Inv\big(\{g_s\}\big)$ coïncident à des événements de $\mathbb{P}_{\mathbf{e}_0}$-mesure nulle près ; il en va donc de même pour $Inv\big(\{(\dot{\xi}_s,\xi_s)\}\big)$ et $Inv\big(\{(g_s,\xi_s)\}\big)$. Aussi s'occupe-t-on de la diffusion $\big\{(g_s,\xi_s)\big\}_{s\geqslant 0} = \{\mathbf{e}_s\}_{s\geqslant 0}$ sur $\mathcal{G}$. Cette diffusion étant engendrée par des champs de vecteurs invariants par translation à gauche, la suite $\{\mathbf{e}_n\}_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire sur $\mathcal{G}$. Le théorème suivant ramène l'étude du comportement asymptotique de la diffusion $\{\mathbf{e}_s\}_{s\geqslant 0}$ à celle de la marche aléatoire $\{\mathbf{e}_n\}_{n\geqslant 0}$. Il fait partie du folklore sur le sujet.

THÉORÈME **16.** *Soit* $\mathbf{e}_0 \in \mathcal{G}$. *Les tribus* $Inv\big(\{\mathbf{e}_s\}\big)$ *et* $Inv\big(\{\mathbf{e}_n\}\big)$ *coincident à des ensembles de* $\mathbb{P}_{\mathbf{e}_0}$*-mesure nulle près.*

• Sous l'impulsion de Furstenberg ([Fur63]), l'étude du comportement asymptotique des marches aléatoires sur des groupes s'est développée dans de nombreuses directions, pour venir prendre sa place naturelle dans l'étude des processus de Lévy sur des groupes. Poursuivant les travaux d'Azencott ([Aze70]), Raugi donne dans [Rau77] une description achevée, en termes algébriques, de l'ensemble des fonctions harmoniques bornées (pour la marche aléatoire) sur un groupe localement compact, sous certaine hypothèse de moment sur la loi des sauts ([Rau77], théorèmes 8.4 et 13.4). Sa méthode s'applique ici, et la partie **??** est consacréee à l'exposé d'une démonstration algébrique d'un analogue des théorèmes **11** et **15**, dans l'esprit des travaux de [Rau77]. Les notions d'algèbre nécessaires y sont rappelées.

Notons $g = NAK$ la décomposition d'Iwasawa d'un élément $g \in SO_0(1,3)$, associée au sous-groupe commutatif maximal $\mathcal{A} = \left\{A = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t\\ \mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t\end{pmatrix}, \mathrm{Id}_2\right)\ ;\ t\in\mathbb{R}\right\}$. Tout point (g,ξ) de $SO_0(1,3)\times\mathbb{R}^{1,3}$ s'écrit de façon unique

$$(g,\xi) = \big(N, r(\varepsilon_0-\varepsilon_1)\big)\big(A, u(\varepsilon_0+\varepsilon_1)+v\varepsilon_2+w\varepsilon_3\big)(K,0),$$

la mutliplication étant celle du produit semi-direct.

THÉORÈME **17 (Raugi, [Rau77]).** *Soit* $\varepsilon_0 = (g_0,\xi_0) \in SO_0(1,3)\times\mathbb{R}^{1,3}$, *et* $\{\mathbf{e}_n\}_{n\geqslant 0}$ *la marche aléatoire sur* $SO_0(1,3)\times\mathbb{R}^{1,3}$, *issue de* $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_n = (g_n,\xi_n)$. *Notons* $g_n = N_nA_nK_n$ *la décomposition d'Iwasawa de* g_n.

1. *Dans la décomposition*

$$(g_n,\xi_n) = \big(N_n, r_n(\varepsilon_0-\varepsilon_1)\big)\big(A_n, u_n(\varepsilon_0+\varepsilon_1)+v_n\varepsilon_2+w_n\varepsilon_3\big)(K_n,0),$$

   les suites $\{N_n\}_{n\geqslant 0}$ *et* $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ *convergent* $\mathbb{P}_{\mathbf{e}_0}$*-presque sûrement.*

2. *La tribu invariante* $Inv\big(\{\mathbf{e}_n\}\big)$ *est engendrée, sous* $\mathbb{P}_{\mathbf{e}_0}$, *par les variables aléatoires* N_∞ *et* r_∞.

La matrice N_∞ dépend d'un vecteur $h_\infty \in \mathbb{R}^2$. La correspondance entre les quantités algébriques (h_∞, r_∞), d'une part, et les quantités géométriques $(\sigma_\infty, R_\infty^{\sigma_\infty})$, d'autre part, est explicite.

[32] La composante connexe de l'identité, plus précisément.

PROPOSITION **18.** *Le vecteur h_∞ est la projection stéréographique de la direction asymptotique $\sigma_\infty \in \mathbb{S}^2$ de $\{\dot{\xi}_s\}_{s\geqslant 0}$.*

On a $r_\infty = \frac{1+|h_\infty|^2}{\sqrt{2}} R_\infty^{\sigma_\infty}$.

Aussi le résultat de Raugi démontre-t-il de manière totalement différente le théorème **11**.

Bibliographie

[Anc90] A. Ancona. Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés. In *École d'été de Probabilités de Saint-Flour XVIII—1988*, volume 1427 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–112. Springer, Berlin, 1990.

[And83] Michael T. Anderson. The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature. *J. Differential Geom.*, 18(4) :701–721 (1984), 1983.

[Aze70] Robert Azencott. *Espaces de Poisson des groupes localement compacts.* Springer-Verlag, Berlin, 1970. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 148.

[BACK95] Gérard Ben Arous, Michael Cranston, and Wilfrid S. Kendall. Coupling constructions for hypoelliptic diffusions : two examples. In *Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993)*, volume 57 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 193–212. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[Cra91] M. Cranston. Gradient estimates on manifolds using coupling. *J. Funct. Anal.*, 99(1) :110–124, 1991.

[Dud66] R.M. Dudley. Lorentz-invariant Markov processes in relativistic phase space. *Ark. Mat.*, 6 :241–268, 1966.

[Dud73] R. M. Dudley. Asymptotics of some relativistic Markov processes. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 70 :3551–3555, 1973.

[Ein05] Albert Einstein. Zur elektrodynamik betwegter körper. *Annalen der Physik*, 17, 1905.

[Fur63] Harry Furstenberg. A Poisson formula for semi-simple Lie groups. *Ann. of Math. (2)*, 77 :335–386, 1963.

[GKP72] R. Geroch, E.H. Kronheimer, and Roger Penrose. Ideal points in space-time. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 327 :545–567, 1972.

[Ive92] Birger Iversen. *Hyperbolic geometry*, volume 25 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Ken86] Wilfrid S. Kendall. Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property. *Stochastics*, 19(1-2) :111–129, 1986.

[Kif86] Y. Kifer. Brownian motion and positive harmonic functions on complete manifolds of nonpositive curvature. In *From local times to global geometry, control and physics (Coventry, 1984/85)*, volume 150 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 187–232. Longman Sci. Tech., Harlow, 1986.

[KP04] Wilfrid S. Kendall and Catherine J. Price. Coupling iterated Kolmogorov diffusions. *Electron. J. Probab.*, 9 :no. 13, 382–410 (electronic), 2004.

[KTŠ59] F. I. Karpelevič, V. N. Tutubalin, and M. G. Šur. Limit theorems for compositions of distributions in the Lobačevskiĭ plane and space. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 4 :432–436, 1959.

[McK69] H. P. McKean, Jr. *Stochastic integrals.* Probability and Mathematical Statistics, No. 5. Academic Press, New York, 1969.

[Pra75] Jean-Jacques Prat. Étude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownien sur une variété à courbure négative. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 280(22) :Aiii, A1539–A1542, 1975.

[Rau77] Albert Raugi. Fonctions harmoniques sur les groupes localement compacts à base dénombrable. *Bull. Soc. Math. France Mém.*, (54) :5–118, 1977.

[RW00] L. C. G. Rogers and David Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Foundations, Reprint of the second (1994) edition.

[Zee64] E. C. Zeeman. Causality implies the Lorentz group. *J. Mathematical Phys.*, 5 :490–493, 1964.